Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Matemáticas

Escuela Profesional de Matemática

Rápida estabilización

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática Pura

AUTOR

Ricardo Eleodoro FUENTES APOLAYA

ASESOR

Raúl Moisés IZAGUIRRE MAGUIÑA

Lima, Perú

2009

Referencia bibliográfica

Fuentes, R. (2009). *Rápida estabilización*. Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Matemática Pura. Escuela Profesional de Matemática, Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado
Dirección General de Biblioteca y Publicaciones

Dirección del Sistema de Bibliotecas y Biblioteca Central

"Año de la lucha contra la corrupción y la impunidad”

Hoja de metadatos complementarios

Código ORCID del autor (dato opcional):

Código ORCID del asesor o asesores (dato obligatorio):

DNI del autor:
06445035

Grupo de investigación:

Institución que financia parcial o totalmente la investigación:

Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación. Debe incluir localidades y/o coordenadas geográficas:
UNMSM, Ciudad Universitaria, Lima Distrito 15081
12º 03’ 30’’ S, 77º 05’ 00’’ O.

Año o rango de años que la investigación abarcó:

2009

ESCUELA ACADÉMICO-PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

En la UNMSM - Ciudad Universitaria - Facultad de Ciencias Matemáticas, siendo las ....13....... horas del día martes 4 de agosto 2009, se reunieron los docentes designados como Miembros del Jurado Calificador de Tesis: Dr. Eugenio Cabanillas Lapa (Presidente), Dr. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA (Miembro), Dr. RAÚL MOISÉS IZAGUIRRE MAGUIÑA (Miembro Asesor), para la sustentación de la tesis titulada:
"RÁPIDA ESTABILIZACIÓN", para optar el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Luego de la exposición de la tesis por parte del tesista, el Presidente del Jurado invitó a dar respuestas a las preguntas que le formulen.

Hecha la evaluación correspondiente por los Miembros del Jurado, el tesista mereció la aprobación unánime obteniendo como calificativo promedio la nota de:

...Diecinueve.............................(19).

A continuación la Presidente del Jurado, Dr. Eugenio Cabanillas Lapa, manifestó que el señor Bachiller Ricardo Eleodoro Fuentes Apolaya, en vista de haber aprobado la sustentación de su tesis, será propuesto para que se le otorgue el Título Profesional de Licenciado en Matemática.

Siendo las 13.45......... horas se levantó la sesión firmando para constancia la presente Acta en tres (3) copias originales.

DR. EUGENIO CABANILLAS LAPA
PRESIDENTE

DR. ALFONSO PÉREZ SALVATIERRA
MIEMBRO

DR. RAÚL MOISÉS IZAGUIRRE MAGUIÑA
MIEMBRO ASESOR

A mis padres:

Gumercindo Fuentes y

Amelia Apolaya M.

A mis hermanos y sobrinos.

Acknowledgements. We thank Professors M. Milla Miranda (Universidad Federal do Rio de Janeiro) for the constructive conversation about the subject of the monography. In special the Professor M. Izaguirre Maguiña for caring drawn our attention to this question and for his assistance while we were developing the project.

RESUMEN

RÁPIDA ESTABILIZACIÓN

RICARDO ELEODORO FUENTES APOLAYA

JULIO - 2009

Orientador: Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña

Título Obtenido: Licenciado en Matemática

El presente trabajo estudia la existencia, unicidad, controlabilidad y rápida estabilización de la solución global generalizada del problema de valor inicial del sistema

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

donde $A : D(A) \subset H \to H$, es un operador cerrado y densamente definido en un espacio de Hilbert H, y $B : G \to D(A^*)' \subset H', H'$ denota el dual de H, es un operador linear acotado (no necesariamente) definido en otro espacio de Hilbert G.

PALABRAS CLAVES: ECUACIÓN DE RICATTI

CONTROLABILIDAD EXACTA

OBSERVABILIDAD

CONTROL

ABSTRACT

ESTABILIZATION RAPID

RICARDO ELEODORO FUENTES APOLAYA

JULY - 2009

Conseul: Dr. Raúl Moisés Izaguirre Maguiña

Obtained Title: Licenciado en Matemática Pura

– –

The present work studies the existence, uniqueness, controllability and fast stabilization of the generalized global solution of the problem of initial value of the system

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

where $A : D(A) \subset H \to H$, he is a closed operator and densely defined in a space of Hilbert H, and $B : G \to D(A^*)' \subset H', H'$ it denotes the dual one of H, he is an operator to linear limited (not necessarily) defined in another space of Hilbert G.

KEYWORDS: RICCATI EQUATION

EXACT CONTROLABILITY

OBSERVABILITY

CONTROL

Sumário

Capítulo I

Introducción

El objetivo principal de este trabajo es probar la existencia de un control (fuerza) tal que equilibra una situación física. En los tres primeros capítulos estamos interesados en la parte teórica, notaciones, preliminares y teoremas conocidos, los cuales serán generalizados para un sistema abstracto en un espacio de Hilbert.

El capítulo 4, a mi entender el más importante en la parte aplicativa, veremos como se usa todo lo desarrollado anteriormente para conseguir estabilizar el sistema. Más aún tenemos un resultado óptimo en cuanto la fuerza(control) será mínima para obtener la rápida estabilización, este control óptimo es caracterizado como el mínimo de un funcional linear.

En este capítulo estudiamos la solución del problema original:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x^0, \end{cases}$$

donde el operador A tiene como dominio D(A) subconjunto de H, es un operador cerrado y densamente definido en un espacio de Hilbert H, y $B : G \to D(A^*)' \subset H', H'$ denota el dual de H, el cual es un operador lineal limitado (no necesariamente) definido en otro espacio de Hilbert G.

"Asociado al sistema anterior, tenemos el problema dual

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = -A^*\varphi(t), \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ \psi = B^*\varphi, \end{cases}$$

donde A^*, B^* son los correspondientes operadores adjuntos de A y B". Consideramos B el operador de control, u el control y B^* es el operador de observabilidad.

I.1 Existencia de Soluciones del Problema Dual

Antes de dar el teorema de existencia, consideremos satisfechas las siguientes hipótesis.

1. El operador A^* genera un grupo e^{sA^*} en H'.
2. Existe un operador lineal limitado $E \in \mathcal{L}(G, H)$ y un número $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $B^* = E^*(A + \lambda I)^*$.
3. Existen constantes positivas T_1 y C tales que

$$\|\psi\|_{L^2(0,T_1,G')} \leq C \left\|\varphi^0\right\|_{H'}, \ \forall \varphi^0 \in D(A^*)$$

   llamada desigualdad directa en el método H.U.M.

Observación I.1. *La hipótesis (2) puede ser considerada como un debilitamiento de la limitación de B, pues si B es limitada, consideramos $E = (A + \lambda I)^{-1}B$ donde $-\lambda$ pertence al resolvente de A.*

Observación I.2. *Las hipótesis (1)-(3) implican una versión fuerte de la hipótesis (3), esto es, para cualquier $T > 0$, existe una constante $C_T > 0$ tal que la solución del problema dual verifica:*

$$\|\psi\|_{L^2(-T,T;L^2(G'))} \leq C_T \left\|\varphi^0\right\|_{H'}, \ \forall \varphi^0 \in D(A^*)$$

Para probar esto, consideremos dos casos a seguir.

- *CASO 1: Si $T < T_1$, entonces*

$$\int_{-T}^{T} \|\psi(s)\|_{G'}^2 \, ds \leq \int_{-T_1}^{T_1} \|\psi(s)\|_{G'}^2 \, ds \leq C \left\|\varphi^0\right\|_{H'}, \ \forall \varphi^0 \in D(A^*)$$

- *Caso 2: Si $T_1 < T < 2T_1$, Hacemos un cambio adecuado en la integral para limitar las integrales sobre $[T_1, T]$ y $[-T, T_1]$. En el caso general, Hacemos en forma iterada.*

Observación I.3. *Por densidade, podemos mostar que la desigualdad anterior vale para todo $\varphi^0 \in H'$. También tenemos que $\psi \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; G')$, en efecto, si K es un compacto de $\mathbb{R}$, existe $T > 0$, tal que $K \subset [-T, T]$, se sigue que*

$$\int_K \|\psi(s)\|_{G'}^2 \, ds \leq \int_{-T}^{T} \|\psi(s)\|_{G'}^2 \, ds < +\infty$$

Teorema I.1. *Asumiendo la hipótesis (1), el **problema dual** tiene una única solución $\varphi(x,t)$, tal que:*

(a) " Si $\varphi^0 \in D(A^*)$, entonces $\varphi \in C^1(\mathbb{R}, H') \cap C(\mathbb{R}, D(A^*))$ ".

(b) "Si $\varphi^0 \in H'$, entonces $\varphi \in C(\mathbb{R}, H')$".

I.2 Existencia de Soluciones del Problema Original

Para definir la solución del problema original

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

usamos transposición, esto es, para $x_0 \in H, u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, G)$ fijos, multiplicamos formalmente la ecuación por la solución φ del problema dual. Integramos de 0 a $T \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^T \langle x', \varphi \rangle_{H \times H'} \, dt = \int_0^T \langle Ax, \varphi \rangle \, dt + \langle Bu, \varphi \rangle \, dt$$

$$\langle x, \varphi \rangle_{H \times H'} \Big|_0^T - \int_0^T \langle x, \varphi' \rangle_{H \times H'} \, dt = \int_0^T \langle x, A^* \varphi \rangle \, dt + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle \, dt$$

$$\langle x, \varphi \rangle_{H \times H'} \Big|_0^T = \int_0^T \langle x, \varphi' \rangle_{H \times H'} \, dt + \int_0^T \langle x, A^* \varphi \rangle \, dt + \int_0^T \langle u, B^* \varphi \rangle \, dt$$

Por tanto, "

$$(*)\,\langle x(T),\varphi(T)\rangle_{H\times H'}=\langle x(0),\varphi(0)\rangle_{H\times H'}+\int_0^T\langle u(s),\psi(s)\rangle_{G\times G'}\,,\ \forall\varphi^0\in H',\forall T\in\mathbb{R}$$

"Motivados por esta igualdad, definimos la solución ultradebil o por transposición del problema.

Definición I.1. *Decimos que x es solución del problema, si $x:\mathbb{R}\to H$ es tal que verifica la igualdad (*), $\forall\varphi^0\in H',\forall T\in\mathbb{R}$.*

Teorema I.2. *Para cualesquiera $x_0\in H, u\in L^2_{loc}(\mathbb{R},G)$, existe una única solución del problema con la siguiente estimativa:*

$$\|x\|_{L^\infty(-T,T;H)}\le C(T)\left(\|x_0\|_H+\|u\|_{L^2_{loc}(-T,T,G)}\right),\ \forall T>0$$

Demostración: Definimos el operador $L(T):H'\to\mathbb{R}$, para $T>0$ fijo

$$L(T)(\varphi_0)=\langle x(0),\varphi(0)\rangle_{H\times H'}+\int_0^T\langle u(s),\psi(s)\rangle_{G\times G'}\,,$$

Hacemos las limitaciones

$$\left|L(T)(\varphi^0)\right|\le\|x_0\|\left\|\varphi^0\right\|+\|u\|_{L^2(0,T;G)}\|\psi\|_{L^2(0,T;G')}$$

De la hipótesis (3), resulta que "

$$\left|L(T)(\varphi^0)\right|\le\|x_0\|\left\|\varphi^0\right\|+\|u\|_{L^2(0,T;G)}C_T\left\|\varphi^0\right\|_{H'}$$

$$\left|L(T)(\varphi^0)\right|\le C_T\left(\|x_0\|+\|u\|_{L^2(0,T;G)}\right)\left\|\varphi^0\right\|_{H'}$$

Por tanto, $L(T)\in H''=H$", es decir existe un único $x(T)\in H$ tal que

$$L(T)(\varphi^0)=\left\langle x(T),\varphi^0\right\rangle_{H\times H'},\ \ \|x(T)\|_H=\|L(T)\|_{H''}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la hipótesis (1), la función $\varphi^0\mapsto\varphi(T)$ es un automorfismo de H', cuya inversa también es un automorfismo de H' verificando

$$\left\|\varphi^0\right\|_{H'}\le C(T)\|\varphi(T)\|_{H'}$$

Se sigue que

$$\left|L(T)(\varphi^0)\right|\le C(T)\|\varphi(T)\|_{H'}$$

Implica que, $L(T) \in H'' = H$, es decir existe un único $y(T) \in H$ tal que

$$L(T)(\varphi^0) = \langle y(T), \varphi(T) \rangle_{H \times H'}\,, \quad \|y(T)\|_H = \|L(T)\|_{H''}$$

Por unicidad, "$x(T) = y(T)$ y

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H \times H'} = \langle x(0), \varphi^0 \rangle_{H \times H'} + \int_0^T \langle u(s), \psi(s) \rangle_{G \times G'},\ \forall \varphi^0 \in H'$$

Como T fue fijado, la igualdad es válida $\forall T > 0$".
"La estimativa viene de la desigualdad

$$|\langle x(T), \varphi(T) \rangle| \leq C_T \left(\|x_0\| + \|u\|_{L^2(0,T;G)} \right) \left\| \varphi^0 \right\|_{H'}$$

Luego,

$$\|x\|_{C(\mathbb{R},H)} \leq C_T \left(\|x_0\| + \|u\|_{L^2(0,T;G)} \right)$$

"

Observación I.4. *Tenemos que podemos definir la función* $L : (0, +\infty) \to H'', T \mapsto L(T)$*, dado que* $L(T)$ *es definida por una integral, resulta que* L *es uniformemente contínua en* $(0, +\infty)$*.*
Por otro lado,

$$|\ \|X(T_n)\|_H - \|X(T)\|_H\ | = |\ \|L(T_n)\|_{H''} - \|L(T)\|_{H''}\ | \leq \|L(T_n) - L(T)\|_{H''}$$

Como L *es contínua, resulta que*

$$T_n \to T \textit{ entâo } \|X(T_n)\|_H \to \|X(T)\|_H \textit{ em } \mathbb{R}$$

Observación I.5. *También puede ser definida la función* $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$*,*
$f(T) = \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H \times H'}$*. La cual también es uniformemente contínua, luego si*

$$T_n \to T \ \Rightarrow f(T_n) \to f(T)$$

o sea

$$\langle x(T_n), \varphi(T_n) \rangle_{H \times H'} \to \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H \times H'}$$

Observación I.6. *Tenemos que* $x(T_n) \to x(T)$ *debilmente en* H'*, teniendo en cuenta, que para* T *fijo la función* $\varphi(T)$ *recorre todo* H'*,hacemos "*

$$\langle x(T_n) - x(T), \varphi(T) \rangle = \langle x(T_n), \varphi(T) \rangle - \langle x(T_n), \varphi(T_n) \rangle + \langle x(T_n), \varphi(T_n) \rangle - \langle x(T), \varphi(T) \rangle$$

”“Se tiene que

$$|\langle x(T_n) - x(T), \varphi(T)\rangle| \leq |\langle x(T_n), \varphi(T) - \varphi(T_n)\rangle| + |\langle x(T_n), \varphi(T_n)\rangle - \langle x(T), \varphi(T)\rangle|$$

$$\leq \|x(T_n)\| \, \|\varphi(T) - \varphi(T_n)\| + |\langle x(T_n), \varphi(T_n)\rangle - \langle x(T), \varphi(T)\rangle|$$

$$\leq \|L(T_n)\| \, \|\varphi(T) - \varphi(T_n)\| + |\langle x(T_n), \varphi(T_n)\rangle - \langle x(T), \varphi(T)\rangle|$$

De la continuidad de la solución φ y de la observación anterior, resulta que, si $T_n \to T$, entonces $\langle x(T_n) - x(T), \varphi(T)\rangle \to 0$”.

Observación I.7. *Usando las observaciones anteriores mostraremos que $x : \mathbb{R} \to H$ es contínua en todo $\mathbb{R}$. Veamos en el intervalo $[0, +\infty)$, para el otro caso se hace un análisis similar.*
Calculamos,

$$\|x(T_n) - x(T)\|^2 = \|x(T_n)\|^2 + \|x(T)\|^2 - 2(x(T_n), x(T))_H$$

De las observaciones anteriores, si $T_n \to T$,

$$\|x(T_n) - x(T)\| \to 0$$

I.3 Existencia de Soluciones del Problema de Riccati

Con la finalidad de visualizar la teoria que será dada en esta sección, veamos un ejemplo concreto.

Ejemplo I.1. *Considere el sistema*

$$\begin{cases} y''(x,t) = \Delta y(x,t), & (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ y(x,t) = u(x,t), & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \\ y(x,0) = y^0(x), \quad y'(x,0) = y^1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

En principio, tenemos el operador lineal cerrado

$$A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega), \quad Af = \Delta f$$

donde $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, *de hecho el operador puede ser extendido al operador*

$$\widetilde{A} : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

Denotamos $X = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega), D(\mathbb{A}) = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, *y definimos el operador lineal*

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{bmatrix}$$

Se prueba en TANABE H. [8]], que $\mathbb{A}$ *es el generador infinitesimal de un grupo contínuo, denotado por* $e^{t\mathbb{A}}, t \in \mathbb{R}$.

A partir del problema

$$\left| \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0, & em\, \Omega \\ \phi = v, & sobre\, \partial\Omega \end{array} \right.$$

Construímos el operador lineal y contínuo $(F \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega), H^{1/2}(\Omega)))$.

$$F : L^2(\partial\Omega) \to H^{1/2}(\Omega), F(v) = \phi$$

Sea $G \in \mathcal{L}(L^2(\partial\Omega), X)$ *definido por*

$$G(v) = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix} (v) = \begin{bmatrix} F(v) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi \\ 0 \end{bmatrix} \in X$$

Problema de Riccati

Primero, presentamos un teorema referido a existencia de soluciones del problema de Riccati de un grupo fuertemente contínuo.

En esta sección vamos a suponer que $P_T \in \mathcal{L}^+(X)$, esto es $< P_T x, x > \geq 0, \forall x \in X$, es un **isomorfismo** con inversa $Q_T = P_T^{-1}$ y estudiamos la ecuación de Riccati

$$(^*) \;\; \frac{dQ}{dt} - AQ - QA^* + BB^* - QC^*CQ = 0$$

asociada a

$$\frac{dP}{dt} + A^*P + PA + C^*C - PBB^*P = 0$$

Probaremos la existencia y unicidad de la solución regular Q y su relación con P.

Solución Regular

La ventaja de estudiar el problema (*) es poder usar métodos clásicos.“ Podemos reescribir (*) en la forma integral, usando formalmente la variación de constantes

$$Q(t) = e^{-(T-t)A} Q_T e^{-(T-t)A^*} + \int_t^T e^{-(s-t)A} BB^* e^{-(s-t)A^*} ds -$$

$$- \int_t^T e^{-(s-t)A} Q(s) C^* C Q(s) e^{-(s-t)A^*} ds, \; 0 \leq t \leq T$$

Notando que e^{-tA} es un semigrupo para $t \geq 0$, dado que e^{tA} es un grupo”. Definimos a primera integral de arriba como el único operador lineal $M(t)$ en X verificando

$$\langle M(t)x, y \rangle = \int_t^T \left\langle B^* e^{-(s-t)A^*} x, B^* e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds, \quad \forall x, y \in X$$

Luego, tenemos que

$$\langle Q(t)x, y \rangle = \left\langle Q_T e^{-(T-t)A^*} x, e^{-(T-t)A^*} y \right\rangle + \int_t^T \left\langle B^* e^{-(s-t)A^*} x, B^* e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds$$

$$- \int_t^T \left\langle CQ(s) e^{-(s-t)A^*} x, CQ(s) e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds, \; 0 \leq t \leq T, \quad \forall x, y \in X$$

Lema I.1. $M(.) \in C_s([0,T]; \mathcal{L}^+(X))$

Demostración: Dado que

$$\langle M(t)x, y \rangle = \int_0^{T-t} \left\langle B^* e^{-rA^*} x, B^* e^{-rA^*} y \right\rangle dr, \quad \forall x, y \in X$$

tenemos que

$$\langle M(t)x - M(s)x, y \rangle = - \int_{T-t}^{T-s} \left\langle B^* e^{-rA^*} x, B^* e^{-rA^*} y \right\rangle dr, \quad \forall x, y \in X$$

$$\leq \left(\int_{T-t}^{T-s} \left| B^* e^{-rA^*} x \right|^2 dr \right)^{1/2} C^{1/2} |y|$$

La última desigualdad se sigue de la desigualdad de Hölder y de la hipótesis sobre B^*, luego

$$|M(t)x - M(s)x|^2 \leq C \left(\int_{T-t}^{T-s} \left| B^* e^{-rA^*} x \right|^2 dr \right)$$

De la continuidad absoluta de la integral obtenemos la continuidad de $M(.)x$. ♦

Teorema I.3. *El problema (*) tiene una única solución regular $Q \in C_s([0,T];\mathcal{L}^+(X))$ satisfaciendo las identidades*

$$Q(t) = V^*(T,t)Q_T V(T,t) + \int_t^T V^*(s,t)BB^*V(s,t)ds + \int_t^T V^*(s,t)Q(s)C^*CQ(s)V(s,t)ds$$

$$Q(t) = e^{-(T-t)A}Q_T V(T,t) + \int_t^T e^{-(s-t)A}BB^*V(s,t)ds$$

donde $V(t,s)$ es el operador de evolución asociado a la familia $-A^* - C^*CQ$

Demostración: **<u>ETAPA 1:</u> Solución maximal.**

Usando el princípio de contracción en el espacio $C_s([T_1,T];\mathcal{L}^+(X))$, para algún conveniente $T_1 \in [0,T]$, obteniendo existencia y unicidad local.
Repetimos en $C_s([T_2,T];\mathcal{L}^+(X))$, para algún conveniente $T_2 \in [0,T_1]$, y por un argumento similar vamos a tener existencia y unicidad de una solución maximal en un intervalo maximal denotado por J.

<u>ETAPA 2:</u> Definición y Propiedades de $V(t,s)$.

Sea $T_0 \in [0,T]$ tal que $[T_0,T] \subset J$. Consideramos el problema

$$(P_y) \quad \left| \begin{array}{l} y'(t) = (-A^* - C^*CQ(t))\, y(t),\ t \in [T_0,T] \\ y(s) = \phi, \end{array} \right.$$

donde $s \in [T_0,T], \phi \in X$.

Definición I.2. *Decimos que $y \in C([T_0,T];X)$ es una solución regular de (P_y), si*

$$y(t) = e^{-(t-s)A^*}\phi - \int_s^t e^{-(t-r)A^*}C^*CQ(r)y(r)dr$$

Cuando $-A^*$ es el gerador infinitesimal del semigrupo fuertemente contínuo y la perturbación $C^*CQ(.)$ es fuertemente contínuo, lo que muestra la existencia y unicidad de la solución regular.
Se tiene la solución en el sentido que verifica

$$\frac{d}{dt}\langle x(t), y\rangle = \langle x(t), -A - CC^*Q(t)y\rangle\,,\ \forall y \in D(A^*)$$

De forma similar,

$$x(t) = e^{tA}\phi - \int_0^t e^{(t-r)A^*}C^*CQ(s-r)x(r)dr,\ \ t \in [0, s-T_0]$$

es una única solución en $[0, s-T_0]$. Haciendo $y(t) = x(s-t)$, tenemos una solución de (P_y) en $[T_0, s]$. Por tanto, existe una única solución de (P_y) en $[T_0, T] \subset J$, de aqui existe una única solución contínua en J.
Denotamos por $y(t, s, \phi)$ a la única solución de (P_y) en J, tenemos que:
La función $\phi \mapsto y(t, s, \phi)$ es lineal y limitada, luego pertenece a $\mathcal{L}(X)$.

Definición I.3. *Denotamos por $V(t,s)$ el operador en X definido por*

$$V(t,s)\phi = y(t,s,\phi)$$

Propiedades de $V(t,s)$

- $V(t,s)$ está definido, para todo $t,\ s \in J$.
- $V(t,s) \circ V(s,r) = V(t,r), \quad V(t,t) = \text{Identidade en } X,\ \forall t, s, r \in J.$
- $V(t,s)$ es fuertemente contínuo en $(t,s) \in J \times J$.
- Escribimos

$$V(t,s) = e^{-(t-s)A^*} - \int_s^t e^{-(t-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,s) dr$$

<u>ETAPA 3:</u> Identidades para $Q(t)$

Mostraremos las identidades

$$(1)\ \ Q(t) = V(T,t)^* Q_T V(T,t) + \int_t^T V(T,t)^* B B^* V(s,t) ds +$$

$$+ \int_t^T V(s,t)^* Q(s) C^* C V(s,t) ds$$

$$(2)\ \ Q(t) = e^{-(T-t)A} Q_T V(T,t) + \int_t^T e^{-(s-t)A} B B^* V(s,t) ds$$

Primero mostraremos "la identidad (2)

$$Q(t) = e^{-(T-t)A} Q_T V(T,t) + \int_t^T e^{-(s-t)A} B B^* V(s,t) ds$$

Tenemos que

$$Q(t) = e^{-(T-t)A} Q_T e^{-(T-t)A^*} + \int_t^T e^{-(s-t)A} B B^* e^{-(s-t)A^*} ds -$$

$$-\int_t^T e^{-(s-t)A}Q(s)C^*CQ(s)e^{-(s-t)A^*}ds,\ 0\le t\le T$$

"También

$$e^{-(T-t)A^*}=V(T,t)+\int_t^T e^{-(T-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr$$

"Vamos a tener

$$\langle Q(t)x,y\rangle=\left\langle e^{-(T-t)A}Q_T\left[V(T,t)+\int_t^T e^{-(T-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr\right]x,y\right\rangle+$$

$$+\int_t^T \left\langle B^*\left[V(s,t)x+\int_t^s e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)xdr\right],B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds-$$

$$-\int_t^T \left\langle e^{-(s-t)A}Q(s)C^*CQ(s)\left[V(s,t)+\int_t^s e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr\right]x,y\right\rangle ds=$$

$$=\left\langle e^{-(T-t)A}Q_TV(T,t)x,y\right\rangle+\int_t^T \left\langle B^*V(s,t)x,B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds+\alpha(t)$$

Donde

$$\alpha(t)=\left\langle e^{-(T-t)A}Q_T\left(\int_t^T e^{-(T-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr\right)x,y\right\rangle+$$

$$+\int_t^T \left\langle B^*\left(\int_t^s e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)xdr\right),B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds-$$

$$-\int_t^T \left\langle e^{-(s-t)A}Q(s)C^*CQ(s)\left[V(s,t)+\int_t^s e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr\right]x,y\right\rangle ds$$

Sea $I_n=n(n-A^*)^{-1}$, para n suficientemente grande, tenemos que $I_nz\in D(A^*)$, si $z\in X$.

Se tiene que

$$\int_t^T \left\langle B^*\left(\int_t^s e^{-(s-r)A^*}I_nC^*CQ(r)V(r,t)xdr\right),B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds=$$

$$\int_t^T \left\langle \int_t^s B^*e^{-(s-r)A^*}I_nC^*CQ(r)V(r,t)xdr,B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds$$

Dado que $B^*=G^*A^*$, se sigue que

$$\int_t^T \left\langle \int_t^s B^*e^{-(s-r)A^*}I_nC^*CQ(r)V(r,t)xdr,B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds=$$

$$\int_t^T \left\langle \int_t^s G^*e^{-(s-r)A^*}A^*I_nC^*CQ(r)V(r,t)xdr,B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle ds=$$

Haciendo un cambio adecuado, resulta

$$=\int_t^T\int_t^T \left\langle G^*e^{-(s-r)A^*}A^*I_nC^*CQ(r)V(r,t)x,B^*e^{-(s-t)A^*}y\right\rangle dsdr$$

Si $n \to \infty$ de la propiedad de continuidad de B^* y de la convergência fuerte de I_n a la identidad I, resulta que

$$\int_t^T \left\langle B^* \left(\int_t^s e^{-(s-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,t) x dr \right), B^* e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds =$$

$$\int_t^T \int_r^T \left\langle B^* e^{-(s-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,t)x, B^* e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle dsdr$$

"Trabajando para "$\alpha(t)$, obtenemos que

$$\alpha(t) = \int_t^T \left\langle e^{-(r-t)A} e^{-(T-r)A} Q_T e^{-(t-r)A^*} \left(C^* C Q(r) V(r,t) \right) x, e^{-(r-t)A^*} y \right\rangle dr +$$

$$+ \int_t^T \int_r^T \left\langle B^* e^{-(s-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,t)x, B^* e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle dsdr -$$

$$- \int_t^T \left\langle Q(s) C^* C Q(s) V(s,t)x, e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds +$$

$$+ \int_t^T \int_t^T \left\langle e^{-(s-t)A} Q(s) C^* C Q(s) e^{-(s-r)A} C^* C V(r,t)x, e^{-(r-t)A^*} y \right\rangle dsdr$$

Subtituyendo $Q(s)$ en la integral

$$\int_t^T \left\langle Q(s) C^* C Q(s) V(s,t)x, e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds$$

se prueba que $\alpha(t) = 0$". Podemos escribir

$$\langle Q(t)x, y \rangle = \left\langle e^{-(T-t)A} Q_T V(T,t)x, y \right\rangle + \int_t^T \left\langle B^* V(s,t)x, B^* e^{-(s-t)A^*} y \right\rangle ds$$

Lo que equivale

$$Q(t) = e^{-(T-t)A} Q_T V(T,t) + \int_t^T e^{-(s-t)A} B B^* V(s,t) ds$$

Para mostrar la igualdad (1) Hacemos,

$$e^{-(T-t)A^*} = V(T,t) + \int_t^T e^{-(T-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,t) dr$$

$$e^{-(s-t)A^*} = V(s,t) + \int_t^s e^{-(s-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,t) dr$$

"Subtituimos en la igualdad ya mostrada

$$\langle Q(t)x, y \rangle = \left\langle Q_T V(T,t)x, \left[V(T,t) + \int_t^T e^{-(T-r)A^*} C^* C Q(r) V(r,t) dr \right] y \right\rangle +$$

$$\int_t^T \left\langle B^*V(s,t)x, B^*\left[V(s,t)+\int_t^s e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr\right]y\right\rangle ds$$

"Escribimos

$$\langle Q(t)x,y\rangle = \langle Q_TV(T,t)x,V(T,t)y\rangle + \int_t^T \left\langle Q_TV(T,t)x, e^{-(T-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)y\right\rangle dr +$$

$$\int_t^T \langle B^*V(s,t)x, B^*V(s,t)y\rangle + \int_t^T \int_t^s \left\langle B^*V(s,t)x, e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)y\right\rangle drds$$

$$\begin{aligned}\langle Q(t)x,y\rangle &= \langle V(T,t)^*Q_TV(T,t)x,y\rangle + \int_t^T \langle V(s,t)^*BB^*V(s,t)x,y\rangle + \\ &+ \int_t^T \left\langle Q_TV(T,t)x, e^{-(T-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)y\right\rangle dr + \\ &+ \int_t^T \int_t^s \left\langle B^*V(s,t)x, e^{-(s-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)y\right\rangle drds\end{aligned}$$

Trabajando en las integrales (como antes) obtenemos la igualdad.

ETAPA 4 Solución Global.

Tenemos que $Q(t) \geq 0, \forall t \in J$. Por otro lado,

$$\langle Q(t)x,x\rangle = \langle Q_TV(T,t)x,V(T,t)x\rangle + \int_t^T |B^*V(s,t)x|^2\,ds + \int_t^T |CQ(s)V(s,t)x|^2\,ds$$

donde $B^*, C, Q(s), Q_T, V(T,t) \in \mathcal{L}(X)$, luego $Q(t) \leq CI, \forall t \in J$, de ahi

$$\|Q(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C, \forall t \in J$$

Podemos extender para todo $t \in \mathbb{R}$.

Definición y Propriedades de $P(t)$

Teorema I.4. *$Q(t)$ es un isomorfismo, para cada $t \in [0.T]$. Denotamos $P(t) = Q(t)^{-1}$, entonces $P(.) \in C_s([0,T];\mathcal{L}^+(X))$.*

Demostración: Tenemos que

$$\begin{aligned}\langle Q(t)x,x\rangle &= \langle Q_TV(T,t)x,V(T,t)x\rangle + \int_t^T \langle B^*V(s,t)x, B^*V(s,t)x\rangle\,ds \\ &+ \int_t^T \langle CQ(s)V(s,t)x, CQ(s)V(s,t)x\rangle\,ds\end{aligned}$$

O sea,

$$\langle Q(t)x,x\rangle = \langle Q_T V(T,t)x, V(T,t)x\rangle + \int_t^T \ |B^* V(s,t)x|^2\, ds + \int_t^T \ |CQ(s)V(s,t)x|^2\, ds$$

Implica que

$$\langle Q(t)x,x\rangle \geq \langle Q_T V(T,t)x, V(T,t)x\rangle\ ,\ \forall x \in X$$

Sabemos que Q_T es un isomorfismo y además de esto, $V(T,T) = V(T,t)V(t,T) = I_X$ tendremos que $V(T,t)$ también es un isomorfismo y $V(t,T) = V(T,t)^{-1}$.

Observamos que Q_T define una norma equivalente en X tal que

$$\langle Q_T x, x\rangle \leq \|Q_T\|\, |x|^2$$

Por el teorema del gráfico cerrado resulta que

$$|x|^2 \leq \frac{1}{\|Q_T\|}\langle Q_T x,x\rangle \Leftrightarrow \frac{1}{\|P_T\|}\,|x|^2 \leq \langle Q_T x, x\rangle$$

Además de esto

$$\langle Q_T V(T,t)x, V(T,t)x\rangle \geq \frac{1}{|P_T|}\,|V(T,t)x|^2$$

También

$$|x|^2 = |V(t,T)V(T,t)x|^2 \leq \|V(t,T)\|^2\, |V(T,t)x|^2$$

O sea,

$$\frac{1}{\|V(t,T)\|^2}\,|x|^2 \leq |V(T,t)x|^2$$

lo cual implica que

$$\langle Q_T V(T,t)x, V(T,t)x\rangle \geq \frac{1}{\|P_T\|\,\|V(t,T)\|}\,|x|^2$$

Como $V(.,T)$ es fuertemente contínuo en J, por el Teorema de Banach-Steinhaus, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|V(t,T)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq C$. De las desigualdades de arriba resulta que

$$\langle Q(t)x,x\rangle \geq C\,|x|^2\,, \forall x \in X, \forall t \in [0,T]$$

se sigue que $Q(t)$ es un isomorfismo y

$$\|P(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{C},\ \forall t \in [0,T]$$

donde $P(t) = Q(t)^{-1}$. También

$$P(t)x - P(s)x = P(t)\left[Q(s) - Q(t)\right]P(s)x$$

Por lo tanto

$$|P(t)x - P(s)x| = |P(t)\left[Q(s) - Q(t)\right]P(s)x| \leq |P(t)\left[Q(s) - Q(t)\right]P(s)|\,|x|$$

$$\leq \frac{1}{C^2}\left\|Q(s) - Q(t)\right\|\,|x|$$

Obtenemos que $P \in C_s([0,T]; \mathcal{L}^+(X))$.

Para poder expresar P como dos identidades integrales, precisamos introducir el operador de evolución $U(t,s)$ asociado con la familia $A - BB^*P$ en algún sentido.

Lema I.2. *Si para cada $s, t \in [0,T]$, definimos $U(t,s) = Q(t)V(t,s)P(s)$, entonces:*

1. *$U(t,s)$ es fuertemente contínuo en $s, t \in [0,T]^2$.*
2. *$U(t,s)U(s,r) = U(t,r)$, $U(t,t) = I_X$, $t, s, r \in [0,T]$.*
3. *$\int_s^T |B^*P(t)U(t,s)x|^2\,dt \leq C\,|x|^2$, para cada $x \in X, s \in [0,T]$.*
4. *$U(t,s)x = e^{(t-s)A}x - \int_s^t e^{(t-r)A}BB^*P(r)U(r,s)xdr$*

Demostración:

1. $|U(t,s)x| = |Q(t)V(t,s)P(s)x| \leq \|Q(t)\|\,\|V(t,s)\|\,\|P(s)\|\,|x| \leq C_1C_2(1/C_1)\,|x|$.
2. $U(t,s)U(s,r) = Q(t)V(t,s)P(s)Q(s)V(s,r)P(r) = Q(t)V(t,r)P(r) = U(t,r)$.
3. $\int_s^T |B^*P(t)U(t,s)x|^2\,dt = \int_s^T |B^*P(t)Q(t)V(t,s)P(s)x|^2\,dt = \int_s^T |B^*V(t,s)P(s)x|^2\,dt \leq C\,|P(s)x|^2 \leq C_1\,|x|^2$
4. Tenemos que

$$Q(s) = e^{-(T-s)A}Q_TV(T,s) + \int_s^T e^{-(r-s)A}BB^*V(r,s)dr$$

Dado que $e^{-(T-s)A} = e^{-(t-s)A}e^{-(T-t)A}$ e $V(T,s) = V(T,t)V(t,s)$, se obtiene que

$$Q(s) = e^{-(t-s)A}\left(e^{-(T-t)A}Q_T V(T,t)\right)V(t,s)+$$

$$e^{-(t-s)A}\left(\int_t^T e^{-(r-t)A}BB^*V(r,t)dr\right)V(t,s)+\int_s^t e^{-(r-s)A}BB^*V(r,s)dr$$

“

$$Q(s) = e^{-(t-s)A}\left(e^{-(T-t)A}Q_T V(T,t)+\int_t^T e^{-(r-t)A}BB^*V(r,t)dr\right)V(t,s)+$$

$$+\int_s^t e^{-(r-s)A}BB^*V(r,s)dr$$

$$Q(s) = e^{-(t-s)A}Q(t)V(t,s)+\int_s^t e^{-(r-s)A}BB^*V(r,s)dr$$

”A esta igualdad aplicamos $e^{(t-s)A}$ a la izquierda de $Q(s)$ y “$V(s,t)$ a la derecha

$$e^{(t-s)A}Q(s)V(s,t) = Q(t)+\int_s^t e^{-(t-r)A}BB^*V(r,t)dr$$

”De la definición de $U(t,s)$, se tiene que

$$U(t,s) = Q(t)V(t,s)P(s) = \left[e^{(t-s)A}Q(s)V(s,t)-\int_s^t e^{-(t-r)A}BB^*V(r,t)dr\right]V(t,s)P(s)$$

$$U(t,s) = Q(t)V(t,s)P(s) = e^{(t-s)A}-\int_s^t e^{-(t-r)A}BB^*V(r,t)V(t,s)P(s)dr$$

$$U(t,s) = Q(t)V(t,s)P(s) = e^{(t-s)A}-\int_s^t e^{-(t-r)A}BB^*P(r)Q(r)V(r,s)P(s)dr$$

$$U(t,s) = Q(t)V(t,s)P(s) = e^{(t-s)A}-\int_s^t e^{-(t-r)A}BB^*P(r)U(r,s)dr$$

Proposición I.1. *La solución P de*

$$\frac{dP}{dt}+A^*P+PA+C^*C-PBB^*P=0,\quad P(T)=P_T$$

verifica la versión integral correspondiente a la ecuación de arriba

(a) “$P(t) = U^*(T,t)P_TU(T,t)+\int_t^T U^*(s,t)C^*CU(s,t)ds+$

$$+\int_t^T U^*(s,t)P(s)BB^*P(s)U(s,t)ds$$

”***(b)*** **“**$P(t) = e^{(T-t)A^*}P_TU(T,t)+\int_t^T e^{(s-t)A^*}C^*CU(s,t)ds$**”**

Demostración: **(a)** Como

$$Q(t) = V^*(T,t)Q_T V(T,t) + \int_t^T V^*(s,t)BB^*V(s,t)ds + \int_t^T V^*(s,t)Q(s)C^*CQ(s)V(s,t)ds$$

y $U(T,t) = Q(T)V(T,t)P(t) = Q_T V(T,t)P(t)$, multiplicamos $Q(t)$ por $P(t)$

$$I_X(t) = Q(t)P(t) = V^*(T,t)Q_T V(T,t)P(t) +$$

$$+ \int_t^T V^*(s,t)BB^*P(s)Q(s)V(s,t)P(t)ds + \int_t^T V^*(s,t)Q(s)C^*CQ(s)V(s,t)P(t)ds$$

Nuevamente multiplicamos por $P(t)$

$$P(t) = P(t)V^*(T,t)U(T,t) + \int_t^T U^*(s,t)P(s)BB^*P(s)U(s,t)ds + \int_t^T U^*(s,t)C^*CU(s,t)ds$$

(b) Para mostrar la otra igualdad, usamos que

$$V(T,t) = e^{-(T-t)A^*} - \int_t^T e^{-(T-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)dr$$

Multiplicamos a derecha por $P(t)$ y a la izquierda por $e^{(T-t)A^*}$ y asi obtenemos

$$e^{(T-t)A^*}V(T,t)P(t) = P(t) - \int_t^T e^{-(t-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)P(t)dr$$

el cual equivale a

$$P(t) = e^{(T-t)A^*}V(T,t)P(t) + \int_t^T e^{-(t-r)A^*}C^*CQ(r)V(r,t)P(t)dr$$

Sabemos que $U(T,t) = Q_T V(T,t)P(t)$, o sea $P_T U(T,t) = V(T,t)P(t)$

$$P(t) = e^{(T-t)A^*}P_T U(T,t) + \int_t^T e^{-(t-r)A^*}C^*CU(r,t)dr \quad \blacklozenge$$

Observación I.8. *En el caso general, cuando P_T no és un isomorfismo, hacemos $P_\epsilon(T) = P_T + \epsilon I$ que es un isomorfismo. Aplicamos los resultados anteriores para $P_T + \epsilon I$ y obtenemos una solución P_ϵ, se muestra que P_ϵ converge a una solución P del problema en $\mathcal{L}(X)$.*

Capítulo II

Controlabilidad y Observabilidad

II.1 Ejemplo de Motivación

Como motivación del estudio de controlabilidad exacta, podemos mencionar varias situaciones de la vida real, como el ejemplo a seguir.

Ejemplo II.1 (Control de Sistemas Diferenciales Ordinárias)**.** *Considere una vibración lineal, digamos, un avión cuyas vibraciones verticales están siendo controladas por aerodinamicas asas-guias (wing-tabs).*

Escojemos adecuadas unidades, de modo que el sistema es de dinamica libre y es dado por

$$x'' + x = 0$$

y el sistema controlable es

$$x'' + x = u$$

el cual es equivalente al sistema diferencial

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = x + u, \end{cases}$$

donde $x = x(t)$ *es el desplazamiento,* $y = y(t)$ *es la velocidad, y* $u = u(t)$ *es la fuerza* *control. Aqui es el estado*

$$\begin{bmatrix} x \\ x' \end{bmatrix} \quad ou \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

es un vector en el plano $\mathbb{R}^2$*, y el control* u *es un escalar real en* $\mathbb{R}$*. En notación vectorial, escribimos*

$$x = x_1, \;\; y = x_2$$

$$x_1' = x_2 = y = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$x_2' = -x_1 + u = f_2(x_1, x_2, u)$$

y la notación matricial para este sistema es

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \mathbf{Bu}$$

Para cada estado inicial $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ *en el instante* $t = 0$*, y cada control* $u(t)$ *con* $t \geq 0$*, existe una única solución o respuesta* $x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0)$*. Escojemos* u *como una función de* t*, esto es, el control estratégico pre-programado corresponde a un control "open-loop"(ciclo abierto). Una abordagem mas importante físico, ainda mais difícil matematicamente, es la utilización de un control "close loop"(ciclo cerrado) donde* $u = u(x, y)$ *depende apenas del estado en cada momento. En este caso, el control depende del "feedback loop"(fuerza en un ciclo) transportando el estado actual de vuelta para influenciar la evolución futura del sistema diferencial, y el sistema físico es auto-corregido, caso surjan imprevistas perturbaciones a lo largo del tiempo(de tiempo en tiempo).*

Vamos a examinar un problema regulador simple de control de un estado inicial $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *para el origen (0, 0). Usando un control de ciclo cerrado feedback ("close loop"), digamos* $u = -y$*, podemos hacer al origen asintoticamente estable para*

$$x'' + x = -x' \quad ou \quad \begin{aligned} x &= y \\ y' &= -x - y \end{aligned}$$

O sea, para cada solución $x(t), y(t) = x'(t)$ *la curva* $x(t), y(t)$ *se aproxima al origen de* $\mathbb{R}^2$*, cuando* $t \to +\infty$*. No entanto, al origen no es atingida en cualquier tiempo finito. Además de esto, usando puro feedback control* $u(x, y)$*, con* $u(0, 0) = 0$ *y* $u(x, y) \in C^1$*, es*

imposible para orientar al origen en un tiempo finito (una vez que el origen es, entonces, un equilíbrio o punto crítico para el sistema autónomo diferencial $x'' + x = u(x, x')$). Otra difícultad del análisis matemático proviene cuando el feedback es un control discontínuo que regula todas las soluciones en el origen.
Ahora, tentaremos regular un oscilador lineal através de un controlador "open-loop"(ciclo abierto) $u(t)$, que puede ser discontínuo. Si esbozamos el sistema avión-fase con $u = 0$, encontramos una familia de órbitas periódicas que roden el origen. Para $u = +1$ o $u = -1$, podemos encontrar comportamientos semejantes, más apenas una unidad deslocada para la derecha o izquierda, respectivamente.

Con un simple esquema de comutação entre los valores $u = 1$, e $u = -1$ cada punto inicial pueden ser direccionados para el origen, en un tiempo finito. Un estudio mas especializado muestra que cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ puede ser llevado a un estado final $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$. En este sentido, el sistema es controlable en el avión

Antes de apresentar los resultados principales de este capítulo daremos las definiciones siguientes.

II.2 Definiciones

Definición II.1. *El problema original (P.O.) es llamado exactamente nulo-controlable (NC) en el tiempo T, si para cada $x_0 \in H$ inicial dado existe una función $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, G)$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq C \|x_0\|_H$$

verificando la condición final $x(T) = 0$. Decimos que el control u estabiliza el sistema en el tiempo T.

Definición II.2. *El problema original (P.O.) es llamado exactamente controlable (EC) en el tiempo T, si para cada par de $x_0, x_1 \in H$ dados, existe una función $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, G)$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq C \left(\|x_0\|_H + \|x_1\|_H\right)$$

y la solución satisface la condición $x(T) = x_1$. El control u lleva el estado inicial x_0 al estado x_1 en el tiempo T.

Definición II.3. *El problema (P.O.) es exactamente observable (EO) en el tiempo T,“ si*

$$\|\varphi^0\|_{H'} \leq C\|\psi\|_{L^2(0,T;G)}, \;\; \forall \varphi^0 \in D(A^*)$$

”

Observación II.1. *La última desigualdad es la inversa de la hipótesis (3). En esta desigualdad el valor de T es importante.*

II.3 Teorema de Equivalencia

Teorema II.1. *Asumiendo las tres hipótesis (1)-(3), para cualquier $T > 0$, son equivalentes las siguientes propiedades:*

1. *El problema (P.O.) es exactamente observable (EO) en el tiempo T.*
2. *El problema (P.O.) es exactamente nulo-controlable (NC) en el tiempo T.*
3. *El problema (P.O.) es exactamente controlable (EC) en el tiempo T.*

Demostración: Primero mostraremos que (1) implica (2).
Definimos el operador $\Lambda : D(A^*) \subset H' \to H$ “tal que

$$\langle \Lambda\varphi^0, \psi^0\rangle_{H\times H'} = \int_0^T \langle JB^*e^{-sA^*}\varphi^0, B^*e^{-sA^*}\psi^0\rangle_{G\times G'}, \;\; \forall \varphi^0, \psi^0 \in D(A^*)$$

donde $J : G' \to G$”denota el isomorfismo canonico de Riesz.
El operador Λ verifica :

- Es definido positivo. Pues, “

$$\left\langle \Lambda\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{H\times H'} = \int_0^T \left\langle JB^*e^{-sA^*}\varphi^0, B^*e^{-sA^*}\varphi^0\right\rangle_{G\times G'} = \int_0^T \left\|B^*e^{-sA^*}\varphi^0\right\|_{G'}^2 \geq 0$$

”

- Es autoadjunto. Tenemos que $\Lambda^* : H' \to H$ es tal que

$$\left\langle \Lambda\varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \left\langle \varphi^0, \Lambda^*\psi^0 \right\rangle_{H'\times H}$$

"Equivale,

$$\langle \Lambda\varphi^0, \psi^0\rangle_{H\times H'} = \int_0^T \langle JB^* e^{-sA^*}\varphi^0, B^* e^{-sA^*}\psi^0\rangle_{G\times G'} =$$

$$= \int_0^T \langle B^* e^{-sA^*}\varphi^0, JB^* e^{-sA^*}\psi^0\rangle_{G'\times G} = \left\langle \varphi^0, \Lambda\psi^0 \right\rangle_{H'\times H}$$

"

- $\Lambda \in \mathcal{L}(H', H)$, "se sigue de la desigualdad

$$\left|\left\langle \Lambda\varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{H\times H'}\right| \leq \int_0^T \left\| JB^* e^{-sA^*}\varphi^0 \right\|_G \left\| B^* e^{-sA^*}\psi^0 \right\|_{G'}$$

$$\leq \int_0^T \left\| B^* e^{-sA^*}\varphi^0 \right\|_{G'} \left\| B^* e^{-sA^*}\psi^0 \right\|_{G'} \leq \| B^*\varphi \|_{L^2(0,T;G')} \| B^*\psi \|_{L^2(0,T;G')}$$

"Usando la hipótesis (3),

$$\left|\left\langle \Lambda\varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{H\times H'}\right| \leq C \left\|\varphi^0\right\|_{H'} \left\|\psi^0\right\|_{H'}, \ \ \forall \varphi^0, \psi^0 \in D(A^*)$$

Por lo tanto

$$\left\|\Lambda\varphi^0\right\|_H \leq C_1 \left\|\varphi^0\right\|_{H'}, \ \ \forall \varphi^0 \in D(A^*)$$

Aplicando el teorema de Riesz-Fréchet obtenemos que Λ es un isomorfismo de H' sobre H.

Ahora, dado $x_0 \in H$, definimos la "función (control)

$$u(s) = -JB^* e^{-sA^*}\Lambda^{-1}x_0$$

el cual estabiliza el sistema en el tiempo T".

"En efecto,

$$\langle x(T), \varphi(T)\rangle_{H\times H'} = \langle x(0), \varphi^0\rangle_{H\times H'} + \int_0^T \langle u(s), \psi(s)\rangle_{G\times G'}$$

podemos escribir

$$\left\langle x(T), \varphi(T) \right\rangle_{H\times H'} = \langle x(0), \varphi^0\rangle_{H\times H'} + \int_0^T \langle -JB^* e^{-sA^*}\Lambda^{-1}x_0, \psi(s)\rangle_{G\times G'} =$$

$$= \left\langle x(0), \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} - \int_0^T \left\langle JB^* e^{-sA^*} \Lambda^{-1} x_0, B^* e^{-sA^*} \varphi^0 \right\rangle_{G\times G'}$$

$$= \left\langle x(0), \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} - \left\langle \Lambda\Lambda^{-1} x_0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} = 0, \ \ \forall \varphi^0 \in H'$$

"Esto es

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H\times H'} = 0, \ \ \forall \varphi^0 \in H'$$

De la teoria de grupos, sabemos que $\varphi(T)$ recorre todo H'. Deducimos que $x(T) = 0$.
También, observar que

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} = \left\| -JB^* e^{-sA^*} \Lambda^{-1} x_0 \right\|_{L^2(0,T;G)} = \left\| B^* e^{-sA^*} \Lambda^{-1} x_0 \right\|_{L^2(0,T;G')} \leq C_1 \left\| \Lambda^{-1} x_0 \right\|_{H'}$$

Como $\Lambda^{-1} \in \mathcal{L}(H, H')$, resulta que

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq C_1 \left\| \Lambda^{-1} x_0 \right\|_{H'} \leq C \|x_0\|_H$$

Vamos a mostrar que (2) implica (3). Sean $x_0, x_1 \in H$, usando la hipótesis, denotamos por u el control que estabiliza el inicial $x_0 - e^{-TA} x_1 \in H$ dado, o sea

$$\langle y(T), \varphi(T) \rangle_{H\times H'} = \left\langle x_0 - e^{-TA} x_1, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} + \int_0^T \langle u(s), \psi(s) \rangle_{G\times G'}$$

con $y(T) = 0$.
Sabemos que el control $u = 0$ (zero), define la solución z que lleva el inicial $e^{-TA} x_1$ dado en un tiempo T al elemento x_1, el cual equivale, z solución de

$$\begin{cases} z' = Az \\ z(0) = e^{-TA} x_1, \\ z(T) = x_1 \end{cases}$$

$x(t) = y(t) + z(t)$ es la solución procurada.
Además de esto,

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq C \left\| (x_0 - e^{-TA} x_1) \right\|_H$$

o sea,

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq C_1 (\|x_0\|_H + \|x_1\|_H)$$

Falta verificar que (3) implica (1). Sea x_0 arbitrário y $u \in L^2(0, T; G)$ el control satisfaciendo

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq C_1 \|x_0\|_H$$

con $x(T)=0$. Dado $\varphi^0 \in H'$, por definición de solución x, “se tiene que

$$\left\langle x_0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} = -\int_0^T \langle u(s), \psi(s)\rangle_{G\times G'} \, ds$$

Luego,

$$\left| \left\langle x_0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} \right| \leq C \left\| u \right\|_{L^2(0,T;G)} \left\| \psi \right\|_{L^2(0,T;G')}$$

$$\left| \left\langle x_0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} \right| \leq C_1 \left\| x_0 \right\|_H \left\| \psi \right\|_{L^2(0,T;G')}$$

”Esta desigualdad es válida para todo $x_0 \in H$, se sigue que

$$\left\| \varphi^0 \right\|_{H'} \leq C_1 \left\| \psi \right\|_{L^2(0,T;G')}$$

$\Diamond$

Capítulo III

Observabilidad y Estabilización

En esta parte asumimos válidas las hipótesis (1)-(3), adicionando la cuarta hipótesis a seguir.
(4) Existen dos números positivos $T > 0$ e $C > 0$ tales que

$$\left\|\varphi^0\right\|_{H'} \leq C_1 \left\|\psi\right\|_{L^2(0,T;G')}, \ \ \forall \varphi^0 \in D(A^*)$$

esta desigualdad es mas conocida como desigualdad inversa.

III.1 Función Auxiliar (Feedback)

Definición III.1 (Función Feedback)**.** *Si ω es un número arbitrário positivo, denotamos por $T_\omega = T + (2\omega)^{-1}$ y definimos "la función*

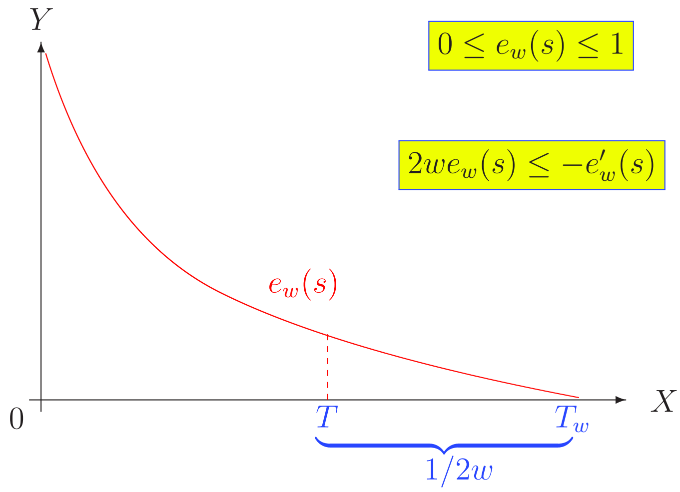
$$e_\omega(s) = \begin{cases} e^{-2\omega s}, & se;\ 0 \leq s \leq T \\ 2\omega e^{-2\omega T}(T_\omega - s), & se.\ T \leq s \leq T_\omega \end{cases}$$

"

Observación III.1. *La función e_ω representa el "feedback"que actuará en el sistema, y tienen las siguientes propiedades:*

- $0 \leq e_\omega(s) \leq 1$.
- *Es una función decreciente en $[0, T_\omega]$.*

- $2\omega e_\omega(s) \leq -e'_\omega(s)$
- *El comportamiento de la función puede ser visualizado en la figura siguiente*



III.2 Operador Λ_ω

Para cada ω, definimos un operador $\Lambda_\omega : H' \to H$ "tal que

$$\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \left\langle JB^* e^{-sA^*}\varphi^0, B^* e^{-sA^*}\psi^0 \right\rangle_{G\times G'} ds, \quad \forall \varphi^0, \psi^0 \in D(A^*)$$

donde $J : G' \to G$"denota el isomorfismo canonico de Riesz.

El operador Λ_ω es definido positivo, autoadjunto y $\Lambda_\omega \in \mathcal{L}(H', H)$. De aqui Λ_ω es un automorfismo de H' sobre H, luego existe $\Lambda_\omega^{-1} \in \mathcal{L}(H, H')$ también es un isomorfismo. Observar que

$$\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \left\langle JB^* e^{-sA^*}\varphi^0, B^* e^{-sA^*}\varphi^0 \right\rangle_{G\times G'} ds$$

$$\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \left\| B^* e^{-sA^*}\varphi^0 \right\|_{G'}^2 ds \geq \int_0^{T} e_\omega(s) \left\| B^* e^{-sA^*}\varphi^0 \right\|_{G'}^2 ds \geq$$

$$\geq e^{-2\omega T} \int_0^{T} \left\| B^* e^{-sA^*}\varphi^0 \right\|_{G'}^2 ds$$

De la hipótesis (4), resulta que

$$\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} \geq C(T) \left\| \varphi^0 \right\|_{H'}^2$$

En consecuencia, en H' la norma usual es equivalente a la norma

$$\left\|\varphi^0\right\|_{H'} = \left(\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'}\right)^{1/2}$$

También, tenemos que en H la norma usual es equivalente a la norma dada por

$$\left\|x_0\right\|_\omega = \left(\left\langle \Lambda_\omega^{-1} x_0, x_0 \right\rangle_{H'\times H}\right)^{1/2}$$

Basta ver que $\Lambda_\omega^{-1}x_0 = \varphi^0 \Leftrightarrow x_0 = \Lambda_\omega \varphi^0$, se sigue que

$$\left\|x_0\right\|_\omega^2 = \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x_0, x_0 \right\rangle_{H'\times H} = \left\langle \varphi^0, \Lambda_\omega \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} \geq C(T) \left\|\varphi^0\right\|_{H'}^2$$

Tomando extremos en la desigualdad anterior,

$$\left\|x_0\right\|_\omega^2 \geq C(T) \left\|\varphi^0\right\|_{H'}^2$$

por otro lado, tenemos que $\Lambda_\omega \in \mathcal{L}(H', H)$, luego

$$\left\|\Lambda_\omega \varphi^0\right\|_H \leq C_1 \left\|\varphi^0\right\|_{H'} \Leftrightarrow \left\|\varphi^0\right\|_{H'} \geq C_2 \left\|\Lambda_\omega \varphi^0\right\|_H$$

Aplicando esta última desigualdad, se tiene que

$$\left\|x_0\right\|_\omega^2 \geq C(T) \left\|\varphi^0\right\|_{H'}^2 \geq C_2(T) \left\|\Lambda_\omega \varphi^0\right\|_H^2$$

Por lo tanto,

$$\left\|x_0\right\|_\omega^2 \geq C_2(T) \left\|x_0\right\|_H^2$$

III.3 Teorema de Estabilización Rápida

A seguir veremos el teorema principal que garantiza que las soluciones ultradebiles decaen rápidamente, independientes de los datos iniciais.

Teorema III.1. *Satisfechas las cuatro hipótesis, para algún $T > 0$ y $\omega > 0$, denotamos*

$$F = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}$$

Entonces A+BF genera un grupo fuertemente contínuo en H y la solución del problema original

$$\begin{cases} x' = Ax + BFx, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

verifica la estimativa

$$\|x(t)\|_\omega \leq \|x_0\|_\omega \cdot e^{-\omega t}, \quad \forall x_0 \in H,\ \forall t \geq 0$$

Demostración: El operador $A + BF$ no es generador infinitesimal de un grupo fuertemente contínuo en H. El operador está densamente definido como una restricción de otro generador en el sentido dado en FLANDOLI, F.[2].

El isomorfismo "$\Lambda_\omega \in \mathcal{L}(H', H)$ es denotado por

$$\Lambda_\omega = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\, e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} ds$$

teniendo en cuenta, que es definido por

$$\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \left\langle JB^* e^{-sA^*} \varphi^0, B^* e^{-sA^*} \psi^0 \right\rangle_{G\times G'} ds, \ \ \forall \varphi^0, \psi^0 \in D(A^*)$$

equivale a

$$\left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \left\langle e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} \varphi^0, \psi^0 \right\rangle_{G\times G'} ds, \ \ \forall \varphi^0, \psi^0 \in D(A^*)$$

$$= \left\langle \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\, e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} \varphi^0\, ds, \psi^0 \right\rangle_{G\times G'}, \ \ \forall \varphi^0, \psi^0 \in D(A^*)$$

Veamos algunas observaciones que seran usadas en la prueba".

Observación III.2.

$$\int_0^{T_\omega} \frac{d}{ds} \left[e_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|^2_{G'} \right] ds = e_\omega(T_\omega)\ \|B^*\varphi(T_\omega)\|^2_{G'} - e_\omega(0)\ \|B^*\varphi(0)\|^2_{G'}$$

$$= - \left\| B^* \varphi^0 \right\|^2_{G'}$$

Observación III.3.

$$\frac{d}{ds} \left[e_\omega(s)\ \langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi(s) \rangle_{G\times G'} \right] = e'_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|^2_{G'} +$$

$$+2 e_\omega(s)\ \langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi'(s) \rangle_{G\times G'}$$

Observación III.4.

$$\langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi'(s)\rangle_{G\times G'} = \langle JB^*\varphi(s), B^*\left(-A^*\varphi(s)\right)\rangle_{G\times G'}$$

$$= -\left\langle JB^*\varphi(s), B^*\left(A^*e^{-sA^*}\varphi^0\right)\right\rangle_{G\times G'} = -\left\langle JB^*\varphi(s), B^*\left(e^{-sA^*}A^*\varphi^0\right)\right\rangle_{G\times G'}$$

Se sigue que

$$\int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi'(s)\rangle_{G\times G'}\, ds = -\int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \left\langle JB^*\varphi(s), B^*\left(e^{-sA^*}A^*\varphi^0\right)\right\rangle_{G\times G'}$$

$$= -\left\langle \Lambda_\omega\varphi^0, A^*\varphi^0\right\rangle_{G\times G'} = -\left\langle A\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{G\times G'}$$

"También,

$$\int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi'(s)\rangle_{G\times G'}\, ds = -\left\langle \Lambda_\omega\varphi^0, A^*\varphi^0\right\rangle_{G\times G'} = -\left\langle \Lambda_\omega A^*\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{G\times G'}$$

"

Observación III.5. *De la hipótesis (3), existe un operador autoadjunto limitado no negativo $C \in \mathcal{L}(H,H)$, "llamado raiz quadrada tal que*

$$\left\|C\Lambda_\omega\varphi^0\right\|_H^2 = -\int_0^{T_\omega} e'_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|_{G'}^2\, ds,\ \ \forall\varphi^0 \in D(A^*)$$

Tenemos que

$$\left\|C\Lambda_\omega\varphi^0\right\|_H^2 = \left\langle JC\Lambda_\omega\varphi^0, C\Lambda_\omega\varphi^0\right\rangle_{H'\times H} = \left\langle \Lambda_\omega CJC\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{H'\times H}$$

De la primera observación de esta demostración, se tiene que:

$$\int_0^{T_\omega} \frac{d}{ds}\left[e_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|_{G'}^2\right] ds = -\left\|B^*\varphi^0\right\|_{G'}^2$$

De la segunda observación, resulta

$$\int_0^{T_\omega} \frac{d}{ds}\left[e_\omega(s)\ \langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi(s)\rangle_{G\times G'}\right] ds = \int_0^{T_\omega} e'_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|_{G'}^2\, ds$$

$$+2\int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \langle JB^*\varphi(s), B^*\varphi'(s)\rangle_{G\times G'}\, ds = -\left\|B^*\varphi^0\right\|_{G'}^2$$

Teniendo en cuenta las otras observaciones

$$-\left\langle \Lambda_\omega CJC\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{H'\times H} - \left\langle A\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{G\times G'} - \left\langle \Lambda_\omega A^*\varphi^0, \varphi^0\right\rangle_{G\times G'}$$

$$= -\left\langle BJB^*\varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{G\times G'}$$

"Podemos escribir

$$\left\langle A\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{G\times G'} + \left\langle \Lambda_\omega A^*\varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{G\times G'} -$$

$$\left\langle BJB^*\varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{G\times G'} + \left\langle \Lambda_\omega CJC\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{H'\times H} = 0$$

siendo válida para todo $\varphi^0 \in D((A^*)^2)$, por densidad vale en H'. Luego,

$$A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - BJB^* + \Lambda_\omega CJC\Lambda_\omega = 0 \text{ em } H' \simeq H$$

De las hipótesis (1)-(3), podemos aplicar el teorema de Flandoli, concluyendo que Λ_ω^{-1} verifica la ecuación de Riccati, a saber

$$\Lambda_\omega^{-1}A + A^*\Lambda_\omega^{-1} - \Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC = 0 \text{ em } H \simeq H'$$

en el sentido debil el operador $A + BF = A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1}$ genera un grupo fuertemente contínuo $U(s)$ en H y mostraremos que

$$\Lambda_\omega^{-1} = U(t-s)^*\Lambda_\omega^{-1}U(t-s) + \int_s^t U(\tau - s)^* \left(\Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC\right) U(\tau - s)d\tau$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Fijamos $s_0 \in \mathbb{R}$, y denotamos

$$f(t) = \Lambda_\omega^{-1} - U(t-s_0)^*\Lambda_\omega^{-1}U(t-s_0) - \int_{s_0}^t U(\tau-s_0)^* \left(\Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC\right) U(\tau-s_0)d\tau$$

Observamos que

$$f(s_0) = \Lambda_\omega^{-1} - U(s_0 - s_0)^*\Lambda_\omega^{-1}U(s_0 - s_0) - 0$$

$$f(s_0) = \Lambda_\omega^{-1} - U(0)^*\Lambda_\omega^{-1}U(0) = 0$$

Derivando

$$f'(t) = -U'(t-s_0)^*\Lambda_\omega^{-1}U(t-s_0) - U(t-s_0)^*\Lambda_\omega^{-1}U'(t-s_0) -$$

$$-U(t-s_0)^* \left(\Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC\right) U(t-s_0)$$

Dado que, $U' = (A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1})U$, se tiene

$$U'(t-s)^* = \left[(A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1})U(t-s)\right]^*$$

$$U'(t-s_0)^* = U(t-s_0)^*(A^* - \Lambda_\omega^{-1}BJB^*)$$

Subtituyendo arriba, resulta que

$$f'(t) = -U(t-s_0)^*(A^* - \Lambda_\omega^{-1} BJB^*)\Lambda_\omega^{-1}\, U(t-s_0) -$$

$$-U(t-s_0)^*\Lambda_\omega^{-1}(A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1})\, U(t-s_0)$$

$$-U(t-s_0)^* \left(\Lambda_\omega^{-1} BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC\right)\, U(t-s_0)$$

o sea,

$$f'(t) = -U(t-s_0)^*(A^*\Lambda_\omega^{-1} - \Lambda_\omega^{-1} BJB^*\Lambda_\omega^{-1})\, U(t-s_0) -$$

$$-U(t-s_0)^*(\Lambda_\omega^{-1} A - \Lambda_\omega^{-1} BJB^*\Lambda_\omega^{-1})\, U(t-s_0) -$$

$$-U(t-s_0)^* \left(\Lambda_\omega^{-1} BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC\right) U(t-s_0)$$

$$f'(t) = -U(t-s_0)^* \left[A^*\Lambda_\omega^{-1} + \Lambda_\omega^{-1} A - \Lambda_\omega^{-1} BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC\right]\, U(t-s_0)$$

de aqui, $f'(t) = 0$, por lo tanto $f(t) = 0$.

Por otro lado,

$$\left\|C\Lambda_\omega\varphi^0\right\|_H^2 = \left\langle \Lambda_\omega CJC\Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0\right\rangle = -\int_0^{T_\omega} e'_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|_{G'}^2\, ds \geq$$

$$\geq 2\omega \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \|B^*\varphi(s)\|_{G'}^2\, ds = 2\omega \left\langle \Lambda_\omega\varphi^0, \varphi^0\right\rangle$$

Tenemos la siguiente relación de los operadores,

$$\Lambda_\omega CJC\Lambda_\omega \geq 2\omega\Lambda_\omega \Rightarrow CJC \geq 2\omega\Lambda_\omega^{-1}$$

se sigue que

$$\Lambda_\omega^{-1} BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + CJC \geq CJC \geq 2\omega\Lambda_\omega^{-1}$$

por la caraterización de Λ_ω^{-1},

$$\Lambda_\omega^{-1} \geq U(t-s_0)^*\Lambda_\omega^{-1} U(t-s_0) + 2\omega \int_s^t U(\tau - s_0)^*\Lambda_\omega^{-1}\, U(\tau - s_0) d\tau$$

para todo $t \geq s$.

Fijado un arbitrário $x_0 \in H$, denotamos por $x = x(t)$ la solución del problema

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + B(-JB^*\Lambda_\omega^{-1})x(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

resulta que $x(t) = U(t)x_0$, luego tenemos que

$$\left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(s_0), x(s_0) \right\rangle_{H'\times H} \geq \left\langle U(t-s_0)^* \Lambda_\omega^{-1} U(t-s_0)\; U(s_0)x_0, U(s_0)x_0 \right\rangle_{H'\times H}$$
$$+2\omega \left\langle \int_{s_0}^{t} U(\tau - s_0)^* \Lambda_\omega^{-1}\; U(\tau - s_0) d\tau\; U(s_0)x_0, U(s_0)x_0 \right\rangle_{H'\times H}$$

el cual implica

$$\left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(s_0), x(s_0) \right\rangle_{H'\times H} \geq \left\langle \Lambda_\omega^{-1} U(t)x_0, U(t)x_0 \right\rangle_{H'\times H}$$
$$+2\omega \int_{s_0}^{t} \left\langle \Lambda_\omega^{-1}\; U(\tau)x_0, U(\tau)x_0 \right\rangle_{H'\times H} d\tau$$

por lo tanto,

$$\left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(s_0), x(s_0) \right\rangle_{H'\times H} \geq \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \right\rangle_{H'\times H} + 2\omega \int_{s_0}^{t} \left\langle \Lambda_\omega^{-1}\; x(\tau), x(\tau) \right\rangle_{H'\times H} d\tau$$

para todo $t \geq s_0$. Usando el lema, se tiene que

$$\left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \right\rangle_{H'\times H} \leq\; e^{-2\omega t} \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x_0, x_0 \right\rangle_{H'\times H}, \;\; \forall t \geq 0$$

Lema III.1. *Sean $\omega > 0$ y $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función contínua verificando*

$$f(s) \geq f(t) + 2\omega \int_s^t f(\tau)\, d\tau, \quad \textit{onde}\; 0 \leq s < t < +\infty$$

Entonces

$$f(t) \leq e^{-2\omega t} f(0), \quad \textit{para todo}\; t \geq 0$$

Demostración: Asumimos que f es continuamente diferenciable, dividimos por $s-t$ y tomamos el límite cuando $s \to t$,

$$f'(t) + 2\omega f(t) \leq 0 \Rightarrow \left(e^{2\omega t} f(t)\right)' \leq 0$$

Integrando de 0 a t,

$$e^{2\omega t} f(t) \leq f(0) \Leftrightarrow f(t) \leq e^{-2\omega t}\; f(0)$$

Caso General. Podemos aproximar la función contínua f por una secuencia de funciones diferenciables "f_k definidas por

$$f_k(t) = k \int_t^{t+1/k} f(s)\, ds, \; \forall t \geq 0, \; k = 1, 2, ...$$

Las f_k asimismo definidas también verifican la misma desigualdad de f, luego

$$f_k(t) \leq e^{-2\omega t}\; f_k(0), \;\; \forall t \geq 0$$

Si $k \to +\infty$, se sigue el lema".

Corolário III.1. *Asumiendo válidas las hipótesis (1) - (2) y que existem constantes positivas T, ω, C_1, C_2 "tales que*

$$C_1 \left\|\varphi^0\right\|_{H'}^2 \leq \left\langle \Lambda_\omega \varphi^0, \varphi^0 \right\rangle_{H \times H'} \leq C_2 \left\|\varphi^0\right\|_{H'}^2$$

para todo $\varphi^0 \in D(A^*)$". Entonces el operador $A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1}$ genera un grupo fuertemente contínuo en H, y la solución del problema

$$\begin{cases} x' = Ax - BJB^*\Lambda_\omega^{-1}x, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

verifica la estimativa

$$\|x(t)\|_H \leq (C_1/C_2) \|x_0\|_H \; e^{-\omega t}, \quad \forall t > 0$$

Demostración: De la desigualdad, "tenemos que

$$C_1 \left\|\varphi^0\right\|_{H'} \leq \left\|\Lambda_\omega \varphi^0\right\|_{H'} \leq C_2 \left\|\varphi^0\right\|_{H'}$$

vale para todo $\varphi^0 \in H'$. Más aún,

$$\|x_0\|_\omega^2 \leq \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x_0, x_0 \right\rangle_{H' \times H} \leq \left\|\Lambda_\omega^{-1}\right\|_{H'} \|x_0\|_H^2 \leq C_1^{-1} \|x_0\|_H^2$$

También

$$\|x(t)\|_\omega^2 = \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \right\rangle_{H' \times H} \geq C_1 \left\|\Lambda_\omega^{-1} x(t)\right\|_{H'}^2 \geq C_1 C_2^{-1} \|x(t)\|_H^2$$

Por lo tanto

$$C_1 C_2^{-1} \|x(t)\|_H^2 \leq \|x(t)\|_\omega^2 \leq \|x_0\|_\omega^2 \cdot e^{-\omega t} \leq C_1^{-1} \|x_0\|_H^2 \cdot e^{-\omega t}$$

Tomando los extremos

$$\|x(t)\|_H \leq (C_2/C_1) \|x_0\|_H \cdot e^{-\omega t}$$

"

III.4 Observaciones Finales

Observación III.6. *Dado $\omega > 0$, suficientemente grande, la prueba del teorema permite construir un feedback y un decaimiento exponencial con razon ω.*

Observación III.7. *Um método similar antes fue usado para el caso de dimensión finita. Mas no puede ser extendida para el caso de dimensión infinita.*

Observación III.8. *Seguidamente, LIONS J.L.[7], mostró una variante del teorema, asumiendo (2) -(3) y que el operador B es limitado.*

Observación III.9. *Con las hipótesis (1) - (4), se muestra un teorema sobre la existencia de un operador F de H en G tal que $A + BF$ genera en el sentido debil un semigrupo fuertemente contínuo de operadores lineales limitados en H y de dos constantes positivas M e ω tal que la solución del sistema verifica*

$$\|x(t)\|_H \leq M \|x_0\|_H \cdot e^{-\omega t}$$

En este resultado no es obtenido explícitamente F y no tenemos estimativas para M y ω.

Observación III.10. *El feedback F del teorema corresponde a la minimización de la función de costo del funcional*

$$J(x,u) = \int_0^\infty \|Cx(t)\|_H^2 + \|u(t)\|_G^2 \, dt$$

definido en los pares (x,u).
En la realidad, aplicando la teoria de control optimal como en LIONS J.L.[7], [6], podemos ver que la minimización lleva al feedback $F = -JB^*P$, donde P es la única solución de la ecuación algébraica de Riccati

$$-A^*P - PA + PBjB^*P = C^*C$$

Resulta que $P = \Lambda_\omega^{-1}$.

Capítulo IV

Aplicaciones

IV.1 Ecuación de Ondas I

“Consideramos el problema

$$(*)\quad \begin{cases} y'' - \Delta y = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R} \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times \mathbb{R} \\ y = u, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \\ y'(0) = y_0,\ y'(0) = y_1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

donde Ω es un abierto limitado de R^n”, Γ_1 es un subconjunto abierto de la frontera Γ y $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma_1$. Denotamos por ν el vector normal unitário exterior a Γ.
Asumimos que Γ es analítica y que Γ_1 satisface la condición geométrica de control, esto es, existe uma constante positiva T tal que para cualquier rayo de la geometria óptica en Ω que corta Γ_1 en un punto no difractivo en algún tiempo menor o igual a T.
La ecuación de la onda es exactamente controlable en $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ con controles en $L^2(\Gamma_0 \times (0, T))$ si y solamente si todo rayo de luz que se propaga en Ω y se refleja en su frontera segun las leyes de la óptica geométrica, intersecta Γ_0 en un punto no difractivo en un tiempo $t < T$.

Teorema IV.1. *Si $\omega > 0$ es arbitrariamente grande, entonces existen dos operadores lineales limitados*

$$P : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega), \quad Q : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega)$$

y una constante M de forma que, si

$$u = \frac{\partial}{\partial \nu}(Py' + Qy)$$

el sistema de arriba es bien puesto en $\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ y la solución "verifica la estimativa

$$\|(y(t), y'(t))\|_{\mathcal{H}} \leq M \left\|(y^0, y^1)\right\|_{\mathcal{H}} \; e^{-\omega t}$$

para todo $t \geq 0$, para todo $(y^0, y^1) \in \mathcal{H}$".

Observación IV.1. *Asumimos la condición geométrica de control, esto es, que Γ es de clase C^2, y que existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que Γ_1 contiene los pontos x de Γ que satisfacen la condición $(x - x_0) \cdot \nu(x) > 0$ para que Γ_1 sea abierto en $\mathbb{R}^{n-1}$ y debil en el sentido $u \in H_0^{3/2}(\Gamma_1)$.*

Observación IV.2. *El teorema 4.1 mejora los resultados obtenidos anteriormente por LIONS J. L.[6].*

Hacemos "$\varphi = (\xi, \xi')$, $\varphi^0 = (\xi^0, \xi^1)$ para introducir los operadores A^* y B^* dados por

$$D(A^*) = D(B^*) = \big(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega)$$

$$A^*(\eta_0, \eta_1) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = (-\eta_1, -\Delta\eta_0)$$

"

$$B^* : \big(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big) \times H_0^1(\Omega) \to L^2(\Gamma),$$

$$B^*(\eta_0, \eta_1) = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta_0 \\ \eta_1 \end{bmatrix} = \gamma_1\eta_0$$

Retornando a la prueba del teorema. Consideramos el problema dual asociado al sistema anterior, o sea

$$(**) \quad \begin{cases} \xi'' - \Delta\xi = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R} \\ \xi = 0, & \text{em } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \xi(0) = \xi^0, \;\; \xi'(0) = \xi^1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

"Se utiliza la notación $\psi = \dfrac{\partial \xi}{\partial \nu}$, sobre $\Gamma_1 \times \mathbb{R}$.

$$-A^*\varphi = -\begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi' \\ \Delta\xi \end{bmatrix}, \quad \varphi' = \begin{bmatrix} \xi' \\ \xi'' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \ -A^*\varphi = \varphi'$$

$$B^*\varphi = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix} = \gamma_1\xi, \ \ \psi = \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \ \Rightarrow \ B^*\varphi = \psi$$

Con esas notaciones el sistema "(**) adopta la forma

$$\begin{cases} \varphi' = -A^*\varphi, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ \psi = B^*\varphi, \end{cases}$$

"Probaremos que escojiendo $H' = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ y $G = L^2(\Gamma_1)$, las hipótesis (1) - (4) del teorema de decaimento rápido son satisfechas.

Identificamos $L^2(\Omega)$ y $L^2(\Gamma_1)$ con sus duales. Entonces $H = H'' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Es conocido que A^* genera un grupo en H', ver [33].

Para mostrar la hipótesis (2), introducimos la función de Dirichlet $D : L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Omega)$ definido por el problema "

$$\begin{cases} -\Delta(Du), & \text{em } \Omega \\ Du = 0, & \text{em } \Gamma_0 \\ Du = u, & \text{em } \Gamma_1 \end{cases}$$

"Se sabe que D es un operador lineal limitado de $L^2(\Gamma_1)$ en $H^{1/2}(\Omega)$.

Definimos el operador lineal limitado "$E \in \mathcal{L}(G, H)$ por

$$Eu = (0, -Du), \ u \in G$$

"Si "$(\eta_0, \eta_1) \in D(A^*), u \in H_0^{3/2}(\Gamma_1)$, tenemos que

$$\langle E^*A^*(\eta_0, \eta_1), u\rangle_{G' \times G} = \langle A^*(\eta_0, \eta_1), Eu\rangle_{H' \times H}$$

$$= \langle(-\eta_1, -\Delta\eta_0), (0, -Du)\rangle_{H' \times H} = (-\Delta\eta_0, -Du) = \int_\Omega (\Delta\eta_0)Dudx$$

"Como $u \in H_0^{3/2}(\Gamma_1)$ entonces $Du \in H^2(\Omega)$, "vamos a tener

$$\int_\Omega (\Delta\eta_0)Dudx = \int_\Omega \eta_0\Delta(Du)dx + \int_\Gamma (\frac{\partial}{\partial\nu}\eta_0)Dud\Gamma - \int_\Gamma \eta_0(\frac{\partial}{\partial\nu}Du)d\Gamma$$

Dado que $\Delta(Du) = 0$ en Ω, $\eta_0 = 0$ en Γ, $Du = 0$ en Γ_0, $Du = u$ en Γ_1, concluímos que

$$\langle E^* A^*(\eta_0, \eta_1), u\rangle_{G' \times G} = \int_{\Gamma_1} (\frac{\partial}{\partial \nu}\eta_0) u d\Gamma = \langle \gamma_1 \eta_0, u\rangle_{G' \times G} = \langle B^*(\eta_0, \eta_1), u\rangle_{G' \times G}$$

"Por densidade de $H_0^{3/2}(\Gamma_1)$ en $L^2(\Gamma_1)$, deducimos que $B^* = E^* A^*$.

Para verificar las hipótesis (3) - (4), en el problema dual se demuestra la existencia de constantes positivas T, C_1 y C_2 "tales que

$$C_1 \left\|(\xi^0, \xi^1)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\partial \xi}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma \, dt \leq C_2 \left\|(\xi^0, \xi^1)\right\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$$

La primera desigualdad fue probada en [12] y la segunda desigualdad en [30]".

Aplicamos el teorema de decaimento rápido para $A = A^{**}, B = B^{**}$.

Problemas Equivalentes. Ahora, consideramos $y = y(x,t)$ solución del problema original y $\xi = \xi(x,t)$ solución del problema dual, puede ser mostrado rigurosamente utilizando la definición de la solución por transposición del problema (*) "que

$$0 = \int_0^T \int_\Omega (y'' - \Delta y)\xi \, dx \, dt = \left[\int_\Omega (y'\xi - y\xi') \, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega y(\xi'' - \Delta\xi) \, dx \, dt$$
$$- \int_0^T \int_\Gamma (\frac{\partial y}{\partial \nu}) \, \xi \, d\Gamma \, dt + \int_0^T \int_\Gamma y \, (\frac{\partial \xi}{\partial \nu}) \, d\Gamma \, dt$$

Usando las condiciones de ambos problemas, se tiene

$$0 = \left[\int_\Omega (y'\xi - y\xi') \, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma_1} u \, (\frac{\partial \xi}{\partial \nu}) \, d\Gamma \, dt$$

Denotando $x = (-y', y)$, $x_0 = (-y_1, y_0)$, $\varphi = (\xi, \xi')$, $\varphi^0 = (\xi^0, \xi^1)$", podemos escribir la última ecuación en la forma

$$0 = \langle -(-y', y), (\xi, \xi')\rangle_{H \times H'} \Big|_0^T + \int_0^T \langle u(s), B^*\varphi(s)\rangle_{G \times G'} \, dt$$

el cual es equivalente

$$\langle x(t), \varphi(t)\rangle_{H \times H'} \Big|_0^T = \int_0^T \langle u(s), B^*\varphi(s)\rangle_{G \times G'} \, dt$$

"o sea,

$$\langle x(T), \varphi(T)\rangle_{H \times H'} = \left\langle x_0, \varphi^0\right\rangle_{H \times H'} + \int_0^T \langle u(s), B^*\varphi(s)\rangle_{G \times G'} \, dt$$

"

Observación IV.3. *Deseamos expresar el operador "desacoplamiento" $\mathcal{P}$ como una matriz, esto es,*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

donde $P = P^*, Q^* = R, S^* = S$.

Proposición IV.1. *Sean V y W espacios de Hilbert y $H = V \times W$. Se $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(H, H')$ con $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*, \mathcal{P} \geq 0$, entonces existen operadores*

$$P \in \mathcal{L}(V, V'),\ R \in \mathcal{L}(V, W'),\ Q \in \mathcal{L}(W, V'),\ S \in \mathcal{L}(W, W')$$

con $P = P^*,\ Q^* = R,\ S^* = S$ tales que

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

Demostración: Para verificar esta observación, consideremos las restricciones

$$\mathcal{P}\Big|_V : V \times W \to V' \times W',\ \mathcal{P}\Big|_V(v, 0) = (\mathcal{P}_1(v, 0), \mathcal{P}_2(v, 0))$$

Definimos

$$P : V \to V', P(v) = \mathcal{P}_1(v, 0) \ \text{ e } \ R : V \to W', R(v) = \mathcal{P}_2(v, 0)$$

De forma similar

$$\mathcal{P}\Big|_W : V \times W \to V' \times W',\ \mathcal{P}\Big|_W(0, w) = (\mathcal{P}_1(0, w), \mathcal{P}_2(0, w))$$

También, podemos definir

$$Q : W \to W', Q(w) = \mathcal{P}_1(0, w) \ \text{ e } \ S : W \to W', S(w) = \mathcal{P}_2(0, w)$$

Más aún, $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(H, H')$ implica que

$$P \in \mathcal{L}(V, V'), R \in \mathcal{L}(V, W'), Q \in \mathcal{L}(W, V'), S \in \mathcal{L}(W, W').$$

Dado que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^*$ tenemos que

$$P^* = P,\ \ S^* = S,\ \ Q^* = R.$$

También, de $\mathcal{P} \geq 0$ resulta que

$$P \geq 0 \ \text{ and } \ S \geq 0$$

Observación IV.4. *En el caso que $\mathcal{P} \in \mathcal{L}(H, H')$ es un isomorfismo, entonces tenemos que P y S también son isomorfismos.*

Aplicamos la proposición de arriba al operador

$$\Lambda_\omega^{-1} : H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \;\; (V = H^{-1}(\Omega),\; W = L^2(\Omega))$$

Entonces

$$P : H^{-1}(\Omega) \to H_0^1(\Omega),\; R : H^{-1}(\Omega) \to L^2(\Omega),\; Q : L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega),\; S : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$$

Vamos a tener

$$\Lambda_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}$$

De aqui

$$u = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x = -JB^* \begin{bmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y' \\ y \end{bmatrix}$$

$$u = -JB^*\left(-Py' - Qy, Ry' + Sy\right) = -J\gamma_1\left(-Py' - Qy\right) = \gamma_1\left(Py' + Qy\right)$$

Construcción del Feedback. Si $(\xi^0, \xi^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, resolvemos "el problema dual

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta\xi = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R} \\ \xi = 0, & \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \psi = \dfrac{\partial \xi}{\partial \nu}, & \text{sobre } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \\ \xi(0) = \xi^0, \;\; \xi'(0) = \xi^1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Construimos el sistema

$$\begin{cases} z'' - \Delta z = 0, & \text{em } \Omega \times (0, T_\omega) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma_0 \times \mathbb{R} \\ z = e_\omega(s)\psi, & \text{sobre } \Gamma_1 \times (0, T_\omega) \\ z(T_\omega) = z'(T_\omega) = 0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Denotamos $x = (-z', z), \varphi = (\xi, \xi')$". las desigualdades directa e inversa, se sigue que el operador

$$\Lambda_\omega : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega),\ \Lambda_\omega(\xi^0, \xi^1) = (z'(0), -z(0))$$

es un isomorfismo.

Reescrebimos Λ_ω en la forma

$$(***)\ \ \Lambda_\omega : H' \to H,\ \Lambda_\omega(\varphi^0) = -x(0)$$

Observación IV.5. *Tenemos la siguiente relación:*

$$\left\langle\ \Lambda_\omega(\xi^0, \xi^1), (\phi^0, \phi^1)\right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \left\langle\ JB^*\xi, B^*\phi\ \right\rangle_{G\times G'} ds$$

donde ξ y ϕ son soluciones del problema dual asociados a los datos iniciales $(\xi^0, \xi^1), (\phi^0, \phi^1)$ respectivamente.

Por la definición de la solución z, se tiene que

$$\left\langle\ (z'(0), -z(0)), (\phi^0, \phi^1)\right\rangle_{H\times H'} = \left\langle z'(0), \phi^0\right\rangle - \left\langle z(0), \phi^0\right\rangle =$$

$$= \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \left\langle\ J\frac{\partial \xi}{\partial \nu}, \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right\rangle_{G\times G'} ds$$

Por lo tanto,

$$\left\langle\ (z'(0), -z(0)), (\phi^0, \phi^1)\right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} \int_{\Gamma_1} e_\omega(s)\ \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \nu}\ d\Gamma\ ds$$

$$= \left\langle\ \Lambda_\omega(\xi^0, \xi^1), (\phi^0, \phi^1)\right\rangle_{H\times H'},\ \forall(\phi^0, \phi^1)$$

Entonces, la relación (***) es verdadera, esto es,

$$\Lambda_\omega(\xi^0, \xi^1) = (z'(0), -z(0)) = -x(0)$$

Observación IV.6 (Operador de Lax - Milgram). *Aqui Hacemos uso de la teoria general. Para $T = T_\omega > 0$, definimos la forma bilineal contínua y coerciva en $H' \times H'$.*

$$a_{\omega,T_\omega}(\varphi^0, \phi^0) = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s)\ \left\langle JB^*\varphi(s), B^*\phi(s)\right\rangle_{G\times G'} ds$$

Definimos, la función lineal

$$\left\langle F(T_\omega), \phi^0\right\rangle = \left\langle -x(0), \phi^0\right\rangle_{H\times H'}$$

Claramente, $F(T_\omega) \in (H')' = H$, aplicando el Lema de Lax - Milgram existe un único $\widehat{\boldsymbol{\varphi^0}} \in H'$ tal que

$$a_{\omega,T_\omega}\left(\widehat{\boldsymbol{\varphi^0}}, \phi^0\right) = -\left\langle x(0), \phi^0 \right\rangle_{H\times H'}, \quad \forall \phi^0 \in H'$$

o sea,

$$-\left\langle x(0), \phi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{T_\omega} e_\omega(s) \ \langle JB^*\widehat{\varphi}(s), B^*\phi(s)\rangle_{G\times G'} \, ds, \quad \forall \phi^0 \in H'$$

donde $\widehat{\varphi}$ es solución del problema dual asociado a $\widehat{\boldsymbol{\varphi^0}}$.
*Podemos definir el "**Operador de Lax - Milgram**"definido por*

$$\mathcal{L} : H' \to H, \ \mathcal{L}\left(\widehat{\boldsymbol{\varphi^0}}\right) = -x(0)$$

Se verifica que $\mathcal{L} = \Lambda_\omega$.

Observación IV.7. *Para cada $t > 0$, definimos la forma bilineal contínua y coerciva en $H' \times H'$.*

$$a_{\omega,t}(\varphi^0, \phi^0) = \int_0^{t} e_\omega(s) \ \langle JB^*\varphi(s), B^*\phi(s)\rangle_{G\times G'} \, ds$$

Definimos, "la función lineal

$$\left\langle F(t), \phi^0 \right\rangle = \left\langle (x(t), -x_0), (\phi(t), \phi^0) \right\rangle_{(H\times H)\times(H'\times H')}$$

$$= \langle x(t), \phi(t)\rangle_{H\times H'} - \left\langle x_0, \phi^0 \right\rangle_{H\times H'}$$

De las estimativas para la solución ϕ asociada a ϕ^0, se tiene que

$$\left|\left\langle F(t), \phi^0 \right\rangle\right| = \left|\langle x(t), \phi(t)\rangle_{H\times H'} - \left\langle x_0, \phi^0 \right\rangle_{H\times H'}\right| \leq C(t) \cdot \left\|\phi^0\right\|_{H'}$$

Luego $F(t) \in (H')' = H$, aplicando el Lema de Lax - Milgram existe un único $\widehat{\boldsymbol{\varphi_t^0}} \in H'$ tal que

$$a_{\omega,t}\left(\widehat{\boldsymbol{\varphi_t^0}}, \phi^0\right) = \langle x(t), \phi(t)\rangle_{H\times H'} - \left\langle x_0, \phi^0 \right\rangle_{H\times H'}, \quad \forall \phi^0 \in H'$$

o sea,

$$\langle x(t), \phi(t)\rangle_{H\times H'} - \left\langle x_0, \phi^0 \right\rangle_{H\times H'} = \int_0^{t} e_\omega(s) \ \langle JB^*\widehat{\varphi}(s), B^*\phi(s)\rangle_{G\times G'} \, ds, \quad \forall \phi^0 \in H'$$

donde $\widehat{\varphi}$ es solución del problema dual asociado a $\widehat{\boldsymbol{\varphi_t^0}}$".

Podemos definir el operador (definido por el Lema de Lax - Milgram)

$$\mathcal{L} : H' \to H, \; \mathcal{L}\left(\widehat{\boldsymbol{\varphi^0_t}}\right) = x(t)$$

Construimos el feedback (de forma puntual) como sigue:

Para cada $\mathbf{t} > 0$ fijo, tenemos que si $x(\mathbf{t}) \in H$, por lo expuesto, existe $\widehat{\boldsymbol{\varphi^0_t}} = (\widehat{\varphi^0}_t, \widehat{\varphi^1}_t) \in H' = H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que $\mathcal{L}\left(\widehat{\boldsymbol{\varphi^0}}\right) = x(\mathbf{t})$, definimos el feedback puntualmente de forma que

$$u(\mathbf{t}) = \gamma_1\left(\widehat{\varphi^0}_t\right)$$

IV.1.1 Sistema de Otimalidade

Existe una infinidad de controles $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ que llevan al reposo o estado $y(.,v)$ en el tiempo $T > 2R(x^0) = T(x^0)$, mas precisamente, existen infinitos $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ tal que la solución $y(.,v)$ del problema

$$(*)\quad \left| \begin{array}{ll} y''(.,v) - \Delta y(.,v) = 0, & \text{em } \Omega\times]0,T[\\ y(.,v) = 0, & \text{sobre } \Gamma_1\times]0,T[\\ y(.,v) = v, & \text{sobre } \Gamma_0\times]0,T[\\ y(0,v) = y^0,\ y'(0,v) = y^1, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

satisface

$$y(T,v) = 0,\ \ y'(T,v) = 0\ \text{ em } \Omega$$

Aqui $y^0 \in L^2(\Omega), y^1 \in H^{-1}(\Omega)$.

En efecto, sea $\epsilon > 0$ tal que $T - \epsilon > 2R(x^0)$. Considere $v_\epsilon \in L^2(\Gamma_0\times]0,\epsilon[)$ y y_ϵ solución del problema

$$\left| \begin{array}{ll} y''_\epsilon - \Delta y_\epsilon = 0, & \text{em } \Omega\times]0,\epsilon[\\ y_\epsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma_1\times]0,\epsilon[\\ y_\epsilon = v_\epsilon, & \text{sobre } \Gamma_0\times]0,\epsilon[\\ y_\epsilon(0) = y^0,\ y'_\epsilon(0) = y^1, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

Note que $y_\epsilon(\epsilon) \in L^2(\Omega)$ y $y_\epsilon(\epsilon) \in H^{-1}(\Omega)$. Considere la solución $\widehat{y_\epsilon}$ del problema

$$\left| \begin{array}{ll} \widehat{y_\epsilon}''_\epsilon - \Delta \widehat{y_\epsilon} = 0, & \text{em } \Omega\times]\epsilon,T[\\ \widehat{y_\epsilon} = 0, & \text{sobre } \Gamma_1\times]\epsilon,T[\\ \widehat{y_\epsilon} = u, & \text{sobre } \Gamma_0\times]\epsilon,T[\\ \widehat{y_\epsilon}(\epsilon) = y_\epsilon(\epsilon),\ \widehat{y_\epsilon}'(\epsilon) = y^1_\epsilon, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

donde u es el control dado por H.U.M.. Asimismo $u \in L^2(\Gamma_0\times]\epsilon,T[)$ y

$$\widehat{y_\epsilon}(T) = 0,\ \ \widehat{y_\epsilon}'(T) = 0\ \text{ em } \Omega$$

Claramente el control

$$v(t) = \left| \begin{array}{ll} v_\epsilon(t), & 0 < t < \epsilon \\ u, & \epsilon < t < T \end{array} \right.$$

pertenece a $L^2(\Sigma(x^0))$ y lleva el estado

$$y(t) = \left| \begin{array}{ll} y_\epsilon(t), & 0 < t < \epsilon \\ \widehat{y}_\epsilon(t), & \epsilon < t < T \end{array} \right.$$

a la posición de reposo en el instante $t = T$.

Se Fijan $y^0 \in L^2(\Omega)$ y $y^1 \in H^{-1}(\Omega)$. El control $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ es lla0mado **control admisíble** si el estado $y(.,v)$, $y(.,v)$ es solución de $(^*)$ y es llevado a la condición de equilíbrio en $t = T$, esto es,

$$y(T,v) = 0, \;\; y'(T,v) = 0$$

Utilizamos la notación

$$\mathcal{U}_{ad} = \left\{ v \in L^2(\Sigma(x^0));\; v \text{ é um controle admissível} \right\}$$

Por lo expusto anteriormente, $\mathcal{U}_{ad} \neq \emptyset$.

Proposición IV.2. *$\mathcal{U}_{ad}$ es un conjunto convexo y cerrado de $L^2(\Sigma(x^0))$.*

Demostración: Sean $v_1, v_2 \in \mathcal{U}_{ad}$, $0 \leq \lambda \leq 1$ y $v = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$. Sean $y(.,v_1)$ y $y(.,v_2)$ soluciones de $(^*)$ con controles v_1 y v_2, respectivamente, por lo tanto,

$$y(T,v_1) = y(T,v_2) = 0, \;\; y'(T,v_1) = y'(T,v_2) = 0 \;\text{ em } \Omega$$

Sea $y = (1-\lambda)y(.,v_1) + \lambda y(.,v_2)$. Entonces y es solución de $(^*)$ con control $v = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2$ y

$$y(T) = 0, \;\; y'(T) = 0 \;\text{ em } \Omega$$

Asimismo $v = (1-\lambda)v_1 + \lambda v_2 \in \mathcal{U}_{ad}$. Asimismo $\mathcal{U}_{ad}$ es convexo.

Se Muestra que $\mathcal{U}_{ad}$ es cerrado. En efecto, sea (v_η) una sucesión de funciones de $\mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$v_\eta \rightarrow v \;\text{ em }\; L^2(\Sigma(x^0))$$

Sea $y(.,v_\eta)$ la solución definida por transposição de $(^*)$, esto es,

$$y(.,v_\eta) \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

y verifica

$$(1) \quad \int_0^T \int_\Omega y(.,v_\eta).\, f dxdt = -(y^0, \theta'(0)) + \langle y^1, \theta(0)\rangle - \int_{\Sigma(x^0)} v_\eta \frac{\partial\theta}{\partial\nu} d\Gamma dt$$

donde $f \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$ y "θ es la solución del problema:

$$\left| \begin{array}{ll} \theta'' - \Delta\theta = f, & \text{em } \Omega\times]0,T[\\ \theta = 0, & \text{sobre } \Gamma\times]0,T[\\ \theta(T) = 0,\ \theta'(T) = 0, & \text{sobre } \Omega \end{array} \right.$$

"Por ser $v_\eta \in \mathcal{U}_{ad}$ se tiene

$$(2) \quad y(T, v_\eta) = 0, \quad y'(T, v_\eta) = 0 \ \text{ sobre } \Omega$$

Por la regularidad de las soluciones definidas por transposición de (*) y por las estimativas obtenidas, resulta

$$\|y(.,v_\eta)\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \le C(T) \left\{ \left|y^0\right| + \left\|y^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\eta\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \right\}$$

$$\|y'(.,v_\eta)\|_{C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))} \le C(T) \left\{ \left|y^0\right| + \left\|y^1\right\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\eta\|_{L^2(\Sigma(x^0))} \right\}$$

La diferencia $y(.,v_\eta) - y(.,v_\mu)$ es una solución definida por transposición de (*) con datos iniciales nulos y con control $v_\eta - v_\mu$. Se Tiene

$$\|y(.,v_\eta) - y(.,v_\mu)\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \le C(T) \|v_\eta - v_\mu\|_{L^2(\Sigma(x^0))}$$

$$\|y'(.,v_\eta) - y'(.,v_\mu)\|_{C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))} \le C(T) \|v_\eta - v_\mu\|_{L^2(\Sigma(x^0))}$$

Sea $y(.,v) \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ con $y'(.,v) \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$y(.,v_\eta) \to y(.,v) \ \text{ em } C^0([0,T]; L^2(\Omega))$$

$$y'(.,v_\eta) \to y'(.,v) \ \text{ em } C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$$

Tomando el límite en (1) se tiene que $y(.,v)$ es una solución de (*) con control v y por (2) se obtiene

$$y(T,v) = 0, \quad y'(T,v) = 0 \ \text{ sobre } \Omega$$

Asimiso $\mathcal{U}_{ad}$ es cerrado.

Considere el funcional de costo

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma(x^0)} v^2 \, d\Sigma, \quad v \in \mathcal{U}_{ad}$$

Entonces $J(v)$ admite un único mínimo en $\mathcal{U}_{ad}$, esto es,existe un único $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$(J) \;\; J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

En efecto $J(v)$ es un funcional debilmente s.c.i. y estrictamente convexo. Sea

$$\alpha = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Considere una sucesión (v_η) de $\mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$J(v_\eta) \to \alpha, \quad \eta \to \infty$$

Se Tiene que (v_η) es limitada. Luego existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tal que

$$v_\eta \to u, \;\; \text{fraco em } L^2(\Sigma(x^0))$$

Desde que $\mathcal{U}_{ad}$ es convexo cerrado, luego el fecho debil y fuerte de $\mathcal{U}_{ad}$ coinciden. Se Tiene

$$J(u) \leq \liminf J(v_\eta) = \alpha$$

Asimismo

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Por ser $J(v)$ estrictamente convexo tenemos que u es único. En efecto, si existen u_1 y u_2 en $\mathcal{U}_{ad}$, $u_1 \neq u_2$, tales que

$$J(u_1) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v), \;\; J(u_2) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Se considera $u = (1-\lambda)u_1 + \lambda u_2, \lambda \in]0,1[$ y se obtiene

$$J(u) < (1-\lambda)J(u_1) + \lambda J(u_2) = \alpha$$

De esto $u \in \mathcal{U}_{ad}$ com $J(u) < \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$, el cual es un absurdo, asi u es único.

El resultado importante de esta parte es el hecho de que el mínimo u obtenido anteriormente es el control proporcionado por el método H.U.M.

Teorema IV.2. *Para cada par de datos iniciales* $y^0 \in L^2(\Omega), y^1 \in H^{-1}(\Omega)$ *e* $T > 2R(x^0)$ *el control* $v \in L^2(\Sigma(x^0))$ *dado por H.U.M. es aquel que minimiza* $J(v)$ *en* $\mathcal{U}_{ad}$.

Demostración: Debemos mostrar que $u \in \mathcal{U}_{ad}$ es tal que

$$J(u) = \min_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

es el control que es proporcionado por H.U.M.

Se Utiliza el método de penalizacición.
Sea $\mathcal{W}_{ad}$ el conjunto de los $\{v, g\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times L^2(Q)$ tal que existe una solución definida por transposición z del problema

$$(^{***})\quad \left| \begin{array}{ll} z'' - \Delta z = g, & \text{em } \Omega \times]0, T[\\ z = 0, & \text{sobre } \Sigma - \Sigma(x^0) \\ z = v, & \text{sobre } \Sigma(x^0) \\ z(0) = y^0, \;\; z'(0) = y^1 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

que verifica

$$z(T) = 0, \;\; z'(T) = 0 \;\text{ em } \Omega$$

el conjunto $\mathcal{W}_{ad}$ es no vacío pues si v es el control dado por H.U.M. entonces $\{v, 0\} \in \mathcal{W}_{ad}$.
A seguir dividiremos la demostración en 6 partes.
<u>Parte 1</u> $\mathcal{W}_{ad}$ es un conjunto convexo cerrado de $L^2(\Sigma(x^0)) \times L^2(Q)$.
En efecto, por un raciocínio análogo al hecho en la Proposición anterior se muestra que $\mathcal{W}_{ad}$ es convexo.

Sea $\{v_\eta, g_\eta\}$ una sucesión de $\mathcal{W}_{ad}$ tal que

$$v_\eta \to v \;\text{ em } L^2(\Sigma(x^0)) \text{ e } g_\eta \to g \;\text{ em } L^2(Q)$$

Por ser z_η una solución definida por transposición de $(^{***})$ resulta que existe

$$z_\eta \in C^0([0, T], L^2(\Omega)), \; z'_\eta \in C^0([0, T], H^{-1}(\Omega))$$

que verifica

$$\int_Q z_\eta \, f dxdt = -(y^0, \theta'(0)) + \langle y^1, \theta(0) \rangle - \int_{\Sigma(x^0)} v_\eta \frac{\partial \theta}{\partial \nu} d\Gamma dt + \int_Q g_\eta \, \theta dxdt$$

donde $f \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ y θ es la "solución del problema:

$$\left| \begin{array}{ll} \theta'' - \Delta\theta = f, & \text{em } \Omega\times]0,T[\\ \theta = 0, & \text{sobre } \Gamma\times]0,T[\\ \theta(T) = 0,\ \theta'(T) = 0, & \text{sobre } \Omega \end{array} \right.$$

"También

$$\|z_\eta\|_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \leq C(T)\left\{|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\eta\|_{L^2(\Sigma(x^0))} + \|g_\eta\|_{L^2(Q)}\right\}$$

$$\|z'_\eta\|_{C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leq C(T)\left\{|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\eta\|_{L^2(\Sigma(x^0))} + \|g_\eta\|_{L^2(Q)}\right\}$$

Se tiene

$$z_\eta(T) = 0,\ \ z'_\eta(T) = 0 \ \text{ em } \Omega$$

Procediendo como en la demonstración de la proposición anterior se muestra que $\{v,g\} \in L^2(\Sigma(x^0)) \times L^2(Q)$.

Parte 2

Para cada $\epsilon > 0$ se defíne el funcional

$$J_\epsilon(v,g) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} v^2\, d\Sigma + \frac{1}{2\epsilon}\int_Q (z'' - \Delta z)^2\, dxdt, \ \ \{v,g\} \in \mathcal{W}_{ad}$$

El término $\dfrac{1}{2\epsilon}\displaystyle\int_Q (z'' - \Delta z)^2\, dxdt$ es un término de penalización. Por ser $J_\epsilon(v,g)$ un funcional debilmente s.c.i. y estrictamente convexo, existe un único $\{v_\epsilon, g_\epsilon\} \in \mathcal{W}_{ad}$ tal que

$$(J_\epsilon)\ \ J(v_\epsilon, g_\epsilon) = \min_{\{v,g\}\in\mathcal{W}_{ad}} J_\epsilon(v,g)$$

Parte 3 Sea z_ϵ solución del problema

$$\left| \begin{array}{ll} z''_\epsilon - \Delta z_\epsilon = g_\epsilon, & \text{em } \Omega\times]0,T[\\ z_\epsilon = 0, & \text{sobre } \Sigma - \Sigma(x^0) \\ z_\epsilon = v_\epsilon, & \text{sobre } \Sigma(x^0) \\ z_\epsilon(0) = y^0,\ \ z'_\epsilon(0) = y^1 & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

que verifica

$$z_\epsilon(T) = 0,\ \ z'_\epsilon(T) = 0 \ \text{ em } \Omega$$

En esta parte se muestra que (u_ϵ) y $(g_\epsilon/\sqrt{(\epsilon)})$ son limitadas en $L^2(\Sigma(x^0))$ y $L^2(Q)$, respectivamente, para todo $\epsilon > 0$. En efecto, sea $v \in \mathcal{U}_{ad}$ entonces $\{v, 0\} \in \mathcal{W}_{ad}$ y

$$\frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} u_\epsilon^2 \, d\Sigma \leq J_\epsilon(u_\epsilon, g_\epsilon) \leq J(v,0) = J(u)$$

que implica que

$$(u_\epsilon)_{\epsilon>0} \text{ é limitado em } L^2(\Sigma(x^0))$$

y

$$(i) \;\; J_\epsilon(u_\epsilon, g_\epsilon) \leq \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

También

$$\frac{1}{2}\int_Q \left[\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}(z_\epsilon'' - \Delta z_\epsilon)\right]^2 \, dxdt = \frac{1}{2}\int_Q (\frac{g_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}})^2 \, dxdt \leq \inf_{v\in\mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Asi

$$(\frac{g_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}) \text{ é limitada em } L^2(Q)$$

Parte 4 De la parte 3 se tiene que existe $\widehat{v} \in L^2(\Sigma(x^0))$ tal que

$$(1) \;\; u_\epsilon \to \widehat{v} \text{ fraco em } L^2(\Sigma(x^0))$$

y que

$$(2) \;\; \|g_\epsilon\|_{L^2(Q)} \leq C\sqrt{\epsilon}, \; \forall \epsilon > 0$$

De las estimativas obtenidas para las soluciones definidas por transposición resulta entonces

$$(z_\epsilon)_{\epsilon>0} \text{ limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

$$(z_\epsilon')_{\epsilon>0} \text{ limitada em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

Esto indica que existe $\widehat{y} \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ con $\widehat{y}' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ tal que

$$(3) \;\; z_\epsilon \to \widehat{y} \;\; \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

$$(4) \;\; z_\epsilon' \to \widehat{y}' \;\; \text{fraco-estrela em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

Se tiene

$$\Delta z_\epsilon = z_\epsilon'' - g_\epsilon \to \chi \text{ fraco em } H^{-2}(0,T;L^2(\Omega))$$

De (3) tenemos

$$\Delta z_\epsilon \to \Delta \widehat{y} \ \text{ fraco em } L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$$

De las dos últimas convergencias resulta

$$(5) \ \ \Delta z_\epsilon \to \Delta \widehat{y} \ \text{ fraco em } H^{-2}(0,T;L^2(\Omega))$$

De (3) y (5) se obtiene

$$\gamma_0 z_\epsilon \to \gamma_0 \widehat{y} \ \text{ fraco em } H^{-2}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$$

Esto es la convergencia (1) proporciona

$$\widehat{y} = \left| \begin{array}{ll} 0, & \text{sobre } \Sigma - \Sigma(x^0) \\ \widehat{v}, & \text{sobre } \Sigma(x^0) \end{array} \right.$$

De (2) y (3) tenemos

$$z_\epsilon'' - \Delta z_\epsilon = g_\epsilon \to \widehat{y}'' - \Delta \widehat{y} = 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$$

Por densidade tenemos que $\widehat{y}'' - \Delta \widehat{y} = 0$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Las convergencias (3) y (4) implican

$$z_\epsilon(0) = y^0 \to \widehat{y}(0) \ \text{ fraco em } L^2(\Omega)$$

$$z_\epsilon(T) = 0 \to \widehat{y}(T) \ \text{ fraco em } L^2(\Omega)$$

De (4) y del hecho

$$z_\epsilon'' \to \widehat{y}'' \ \text{ fraco em } \ L^2(0,T;H^{-2}(\Omega))$$

resulta

$$z_\epsilon'(0) = y^1 \to \widehat{y}'(0) \ \text{ fraco em } H^{-1}(\Omega)$$

$$z_\epsilon'(T) = 0 \to \widehat{y}'(T) \ \text{ fraco em } H^{-1}(\Omega)$$

Asi

$$(P_g) \ \left| \begin{array}{ll} \widehat{y}'' - \Delta \widehat{y} = 0, & \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ \widehat{y} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{sobre } \Sigma - \Sigma(x^0) \\ \widehat{v}, & \text{sobre } \Sigma(x^0) \end{array} \right. & \\ \widehat{y}(0) = y^0, \ \ \widehat{y}'(0) = y^1, & \text{em } \Omega \end{array} \right.$$

y verifica

$$(P_{\widehat{y},T}) \ \ \widehat{y}(T)=0, \ \ \widehat{y}'(T)=0 \ \text{ em } \ \Omega$$

Por tenerse $\widehat{y} \in L^{\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ sigue que $\widehat{y}$ es una solución definida por transposición del Problema (*).

Se Muestra a seguir que

$$(6) \ \ u'_{\epsilon} \to v \ \text{ em } L^2(\Sigma(x^0))$$

En efecto, de (*) y (**) tenemos que $\widehat{v} \in \mathcal{U}_{ad}$. Se Tiene

$$J(u_{\epsilon})=\frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} u_{\epsilon}^2 d\Sigma \leq J_{\epsilon}(u_{\epsilon},g_{\epsilon})$$

Por (1) se obtiene

$$J(\widehat{v}) \leq \lim\ \inf\ J(u_{\epsilon}) \leq \lim\ \inf\ J_{\epsilon}(u_{\epsilon},g_{\epsilon})$$

y de (i) de la parte 3,

$$J_{\epsilon}(u_{\epsilon},g_{\epsilon}) \leq \inf_{v\in\mathcal{U}ad} J(v)$$

que implica

$$J(\widehat{v}) = \inf_{v\in\mathcal{U}ad} J(v)$$

De las tres últimas expresiones resulta

$$J(\widehat{v}) \leq \lim\ \inf\ J(u_{\epsilon}) \leq J(\widehat{v})$$

Por otro lado, de (i) se obtiene

$$\lim\ \text{Sup}\ J_{\epsilon}(u_{\epsilon},g_{\epsilon}) \leq \inf_{v\in\mathcal{U}ad} = J(\widehat{v})$$

Las dos últimas desigualdades acarrean

$$J(\widehat{v}) = \lim_{\epsilon\to 0}\ J(u_{\epsilon})$$

Esto conjuntamente con la convergencia debil (1) proporcionan la convergencia (6).

Parte 5 Considere

$$p_{\epsilon}=\frac{g_{\epsilon}}{\epsilon}=\frac{(z''_{\epsilon}-\Delta z_{\epsilon})}{\epsilon}$$

El objetivo en esta parte es determinar el problema de evolución que es satisfecho por p_{ϵ}.

Se determina las ecuaciones de Euler del problema de minimización dado por (J_ϵ). Sea $\zeta \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$.
Considere

$$g = \zeta'' - \Delta\zeta \in L^2(Q) \;\text{ e }\; w = \gamma_0\zeta\Big|_{\Sigma(x^0)}$$

Entonces $\{u_\epsilon + \lambda w, g_\epsilon + \lambda g\} \in \mathcal{U}_{ad}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$. En efecto, sea $\chi_\epsilon = z_\epsilon + \lambda g$

$$\left|\begin{array}{ll} \chi_\epsilon'' - \Delta\chi_\epsilon = g_\epsilon + \lambda g, & \\ \chi_\epsilon = \begin{cases} 0, & \text{sobre } \Sigma - \Sigma(x^0) \\ u_\epsilon + \lambda w, & \text{sobre } \Sigma(x^0) \end{cases} & \\ \chi_\epsilon(0) = y^0, \;\; \chi_\epsilon'(0) = y^1, & \text{em } \Omega \end{array}\right.$$

y

$$\chi_\epsilon(T) = 0, \;\; \chi_\epsilon'(T) = 0 \;\text{ em }\; \Omega$$

De los hechos $g_\epsilon + \lambda g \in L^2(Q)$ e $u_\epsilon + \lambda w \in L^2(\Sigma(x^0))$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, se sigue nuestra afirmación. Se Tiene

$$\frac{1}{\lambda}\left[J_\epsilon(u_\epsilon + \lambda w, g_\epsilon + \lambda g) - J_\epsilon(u_\epsilon, g_\epsilon)\right] = \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\int_{\Sigma(x^0)} \left(2\lambda u_\epsilon w + \lambda^2 w^2\right) d\Sigma\right]$$

$$+\frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2\epsilon}\int_Q 2\lambda\left(z_\epsilon'' - \Delta z_\epsilon\right)\left(\zeta'' - \Delta\zeta\right) dQ + \frac{1}{2\epsilon}\int_Q \lambda^2\left(\zeta'' - \Delta\zeta\right) dQ\right]$$

Haciendo $\lambda \to 0$ resulta

$$\int_{\Sigma(x^0)} u_\epsilon w d\Sigma + \frac{1}{\epsilon}\int_Q \left(z_\epsilon'' - \Delta z_\epsilon\right)\left(\zeta'' - \Delta\zeta\right) dQ = 0$$

Sea

$$(7) \;\; p_\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}\left(z_\epsilon'' - \Delta z_\epsilon\right) = -\frac{g_\epsilon}{\epsilon} \in L^2(Q)$$

Entonces

$$(8) \;\; \int_{\Sigma(x^0)} u_\epsilon w d\Sigma - \int_Q p_\epsilon\left(\zeta'' - \Delta\zeta\right) dQ = 0,$$

$\forall \zeta \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$, $w = \gamma_0\zeta\Big|_{\Sigma(x^0)}$.
Considerando $\zeta \in \mathcal{D}(Q)$ vem de (8)

$$p_\epsilon'' - \Delta p_\epsilon = 0 \;\;\text{ em }\; \mathcal{D}'(Q)$$

Por densidad resulta

$$(9) \;\; p_\epsilon'' - \Delta p_\epsilon = 0 \;\;\text{ em }\; L^2(Q)$$

Se tiene $p \in L^2(Q)$, luego $p_\epsilon \in H^{-2}(0,T;L^2(\Omega))$ y

$$p''_\epsilon - \Delta p_\epsilon = 0 \quad \text{em} \quad H^{-2}(0,T;L^2(\Omega))$$

Para ζ en las condiciones (8) resulta

$$(10) \quad \langle p''_\epsilon, \zeta\rangle = \int_Q p_\epsilon \cdot \zeta'' dxdt$$

Por otro lado, de los hechos

$$p_\epsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad -\Delta p_\epsilon \in H^{-2}(0,T;L^2(\Omega))$$

tenemos

$$\gamma_0 p_\epsilon \in H^{-2}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma)), \quad \gamma_1 p_\epsilon \in H^{-2}(0,T;H^{-3/2}(\Gamma))$$

Este resultado implica

$$(11) \quad \langle -\Delta p_\epsilon, \zeta\rangle = \int_Q p_\epsilon \cdot (-\Delta\zeta) dxdt - \langle \frac{\partial p_\epsilon}{\partial\nu}, \zeta\rangle_{X'\times X} + \langle p_\epsilon, \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\rangle_{Y'\times Y}$$

donde $X = H_0^2(0,T;H^{3/2}(\Gamma))$, $Y = H_0^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$.

La demostración de este resultado es hecha primero mostrando la fórmula para funciones regulares que aproximan p_ϵ en $L^2(Q)$ y despues tomando el límite.

De (8), (10) y (11) resulta

$$\int_{\Sigma(x^0)} u_\epsilon w d\Sigma - \langle p''_\epsilon - \Delta p_\epsilon, \zeta\rangle - \langle \frac{\partial p_\epsilon}{\partial\nu}, \zeta\rangle_{X'\times X} + \langle p_\epsilon, \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\rangle_{Y'\times Y} = 0$$

y por (9),

$$(11') \quad \langle \frac{\partial p_\epsilon}{\partial\nu}, \zeta\rangle_{X'\times X} - \langle p_\epsilon, \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\rangle_{Y'\times Y} = \int_{\Sigma(x^0)} u_\epsilon w d\Sigma,$$

$\forall\zeta \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$, $w = \gamma_0\zeta$.

Considere $\zeta \in H_0^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ en esta expresión. Se Obtiene

$$\langle p_\epsilon, \frac{\partial\zeta}{\partial\nu}\rangle_{Y'\times Y} = 0, \quad \forall\zeta \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$$

Esto implica

$$p_\epsilon = 0 \ \text{ em } H^{-2}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma))$$

y por densidad

$$(11'') \quad p_\epsilon = 0 \ \text{ em } L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$$

Sea $y \in H^{-2}(0,T;H_0^1(\Gamma))$ solución del problema

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta y = -\Delta p_\epsilon, & \text{em } H^{-2}(0,T;L^2(\Omega)) \\ y = 0, & \text{sobre } \Sigma \end{array} \right.$$

Entonces por la unicidad de soluciones se tiene que $y = p_\epsilon$, por lo tanto

$$p_\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

Considere ahora en $(11')$,

$$\zeta \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega)) \ \text{ com } \ \frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0$$

Se obtiene

$$\langle \frac{\partial p_\epsilon}{\partial \nu}, \zeta \rangle_{X' \times X} = \int_{\Sigma(x^0)} u_\epsilon w d\Sigma$$

que implica

$$(11''') \quad \frac{\partial p_\epsilon}{\partial \nu} = \begin{cases} 0, & \text{em } L^2(\Sigma - \Sigma(x^0)) \\ u_\epsilon, & \text{em } L^2(\Sigma(x^0)) \end{cases}$$

De $(9), (11'')$ y $(11''')$ tenemos

$$(P_\epsilon) \left| \begin{array}{l} p_\epsilon \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ p_\epsilon'' - \Delta p_\epsilon = 0, \ \text{ em } \ L^2(Q) \\ p_\epsilon = 0, \ \text{ em } \ L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \\ \dfrac{\partial p_\epsilon}{\partial \nu} = \begin{cases} 0, & \text{em } L^2(\Sigma - \Sigma(x^0)) \\ u_\epsilon, & \text{em } L^2(\Sigma(x^0)) \end{cases} \end{array} \right.$$

A seguir se muestra que $p_\epsilon(0)$ y $p_\epsilon'(0)$ estan bien definidos y que $p_\epsilon(0) \in H_0^1(\Omega)$ y $p_\epsilon'(0) \in L^2(\Omega)$.

En efecto, de $(P_\epsilon)_1$ y $(P_\epsilon)_3$ tenemos

$$p_\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

y de $(P_\epsilon)_2$,

$$p_\epsilon'' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

De estas dos últimas expresiones resulta

$$p_\epsilon' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

De estas tres últimas expresiones tiene

$$p_\epsilon \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \;\text{ e }\; p'_\epsilon \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

Considere

$$\widetilde{p_\epsilon}(t) = \begin{cases} p_\epsilon(t),\ t \in]0,T[\\ 0,\ t \in \mathbb{R}-]0,T[\end{cases}$$

(ρ_η) uma sucessão regularizante em $\mathbb{R}$ e $p_{\epsilon,\eta} = p_\epsilon * \rho_\eta$ tem-se

$$p_{\epsilon,\eta}(0) \to p_\epsilon(0) \;\text{ em }\; L^2(\Omega)$$

$$p'_{\epsilon,\eta}(0) \to p'_\epsilon(0) \;\text{ em }\; H^{-1}(\Omega)$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}p_{\epsilon,\eta} \to \frac{\partial}{\partial\nu}p_\epsilon \;\text{ em }\; L^2(o,T;L^2(\Gamma))$$

Também

$$p_{\epsilon,\eta} \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$$

$$p'_{\epsilon,\eta} \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

e por $(P_\epsilon)_2$,

$$p''_{\epsilon,\eta} - \Delta p_{\epsilon,\eta} = (p''_\epsilon - \Delta p_\epsilon) * \rho_\eta = 0$$

Assim $p_{\epsilon,\eta}$ é uma solução fraca da equação de onda em $\Omega\times]0,T[$.

Da desigualdade inversa resulta

$$\frac{1}{2}\left[\|p_{\epsilon,\eta}(0) - p_{\epsilon,\mu}(0)\|^2 + \left|p'_{\epsilon,\eta}(0) - p'_{\epsilon,\mu}(0)\right|^2\right] \leq$$

$$\frac{R(x^0)}{2\,[T-2R(x^0)]}\int_{\Sigma(x^0)}\left[\frac{\partial}{\partial\nu}p_{\epsilon,\eta} - \frac{\partial}{\partial\nu}p_{\epsilon,\mu}\right]^2 d\Sigma$$

Isto e a última convergência implicam que $(p_{\epsilon,\eta}(0))$ e $(p'_{\epsilon,\eta}(0))$, são sucessões de Cauchy em $H_0^1(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente.
Assim existem $\alpha_\epsilon \in H_0^1(\Omega)$ e $\beta_\epsilon \in L^2(\Omega)$, tais que

$$p_{\epsilon,\eta}(0) \to \alpha_\epsilon \;\text{ em } H_0^1(\Omega) \;\text{ e }\; p'_{\epsilon,\eta}(0) \to \beta_\epsilon \;\text{ em } L^2(\Omega)$$

Estas convergências e a penúltima e antepenúltima convergências mostram que

$$p_\epsilon(0) \in H_0^1(\Omega) \quad\text{e}\quad p'_\epsilon(0) \in L^2(\Omega)$$

Assim $p_\epsilon \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ é uma solução fraca do problema

$$(P_\epsilon') \quad \left| \begin{array}{l} p_\epsilon'' - \Delta p_\epsilon = 0, \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[\\ p_\epsilon = 0, \ \text{ em } \ \Gamma\times]0,T[\\ p_\epsilon(0) = p_\epsilon^0, \ \ p_\epsilon'(0) = p_\epsilon^1 \ \ (p_\epsilon^0 \in H_0^1(\Omega), \ p_\epsilon^1 \in L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

Portanto

$$p_\epsilon \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)), \ \ p_\epsilon' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

Da desigualdade inversa, obtém-se

$$\frac{1}{2}\left[\|p_\epsilon(0) - p_\delta(0)\|^2 + |p_\epsilon'(0) - p_\delta'(0)|^2\right] \leq \frac{R(x^0)}{2\left[T - 2R(x^0)\right]}\int_{\Sigma(x^0)} (u_\epsilon - u_\delta)^2 \, d\Sigma$$

$\epsilon > 0, \delta > 0.$

Como

$$u_\epsilon \to \widehat{v} \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma(x^0))$$

vem que existem $p^0 \in H_0^1(\Omega)$ e $p^1 \in L^2(\Omega)$ tais que

$$p_\epsilon(0) \to p^0 \ \text{ em } H_0^1(\Omega) \ \text{ e } \ p_\epsilon'(0) \to p^1 \ \text{ em } L^2(\Omega)$$

Também da desigualdade

$$\|p_\epsilon - p_\delta\|^2_{C^0([0,T];H_0^1(\Omega))} + \|p_\epsilon' - p_\delta'\|^2_{C^0([0,T];L^2(\Omega))} \leq C(T)\left[\|p_\epsilon(0) - p_\delta(0)\|^2 + |p_\epsilon'(0) - p_\delta'(0)|^2\right]$$

vem que existe

$$p \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega)), \ \ p' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

tal que

$$p_\epsilon \to p \ \text{ em } \ C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$$

$$p_\epsilon' \to p' \ \text{ em } \ C^0([0,T];L^2(\Omega))$$

Passando ao limite em (P_ϵ) e (P_ϵ') obtèm-se

$$\left| \begin{array}{l} p'' - \Delta p = 0, \ \text{ em } \ \Omega\times]0,T[\\ p = 0, \ \text{ em } \ \Gamma\times]0,T[\\ p(0) = p^0, \ \ p'(0) = p^1 \ \ (p^0 \in H_0^1(\Omega), \ p^1 \in L^2(\Omega)) \end{array} \right.$$

e

$$(P_{p,T}) \ \ \frac{\partial p}{\partial \nu} = \widehat{v} \ \text{ em } \ L^2(\Sigma(x^0))$$

Parte 6 Usando as notações

$$\phi = p, \;\; \phi^0 = p^0, \;\; \phi^1 = p^1, \;\; \psi = \widehat{y}$$

vem de $(P_{\widehat{y}}), (P_{\widehat{y},T})$ e $(P_p), (P_{p,T})$

$$\left|\begin{array}{l} \phi'' - \Delta\phi = 0, \text{ em } \Omega\times]0,T[\\ \phi = 0, \;\; \text{sobre } \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0, \;\; \phi'(0) = \phi^1 \text{ em } \Omega \\ \psi'' - \Delta\psi = 0, \text{ em } \Omega\times]0,T[\\ \psi(T) = 0, \;\; \psi'(T) = 0 \text{ em } \Omega \\ \psi = \begin{cases} 0, \;\; \text{sobre } \Sigma - \Sigma(x^0) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu}, \;\; \text{sobre } \Sigma(x^0) \end{cases} \end{array}\right.$$

Este sistema é denominado **sistema de optimal** do problema de minimização (J).

Por outro lado, como

$$\psi(0) = y^0, \;\; \psi'(0) = y^1$$

Tem-se

$$\Lambda\left\{\phi^0, \phi^1\right\} = \left\{y^1, -y^0\right\}$$

onde Λ é o isomorfismo entre os espaços $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ obtido pelo método H.U.M.

Observe que o vetor $\widehat{v}$ que minimiza J(v) sobre $\mathcal{U}_{ad}$ é o controle obtido pelo método H.U.M. pois

$$\widehat{v} = \frac{\partial p}{\partial\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial\nu}$$

IV.2 Ecuación de Ondas II

Aqui consideramos o sistema

$$\begin{cases} y'' - \Delta y = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R} \\ \gamma_1(y) = \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = u, & \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R} \\ y'(0) = y_0,\ y'(0) = y_1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde Ω é uma bola aberta com raio R em R^n. Γ é a fronteira de Ω e ν o vetor normal unitário exterior a Γ.

Para $T > 2R$, si ξ es la solución del problema homogeneo

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta \xi = 0, & \text{em } \Omega \times \mathbb{R} \\ \gamma_1(\xi) = \dfrac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \xi'(0) = \xi^0,\ \xi'(0) = \xi^1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

la fórmula

$$\left\|(\xi^0, \xi^1)\right\| = \|\xi\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} = \left(\int_0^T \int_\Gamma |\xi|^2 \ d\Gamma \ dt\right)^{1/2}$$

define uma norma equivalente a la norma usual de $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Denotamos por $H' = \overline{H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)}^{\|\cdot\|}$ el completamento de $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ con la nueva norma introducida.

Por um teorema provado em [32] (J. L. Lions, p. 167), tem-se que

$$H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset H' \subset L^2(\Omega) \times (H^1(\Omega))'$$

Si $H = H''$, resulta que

$$L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \subset H = H'' \subset (H^1(\Omega))' \times L^2(\Omega)$$

Denotamos

$$\mathcal{H} = \{(y_0, y_1) : (y_1, y_0) \in H\}$$

Observamos que, si $(y_0, y_1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \Leftrightarrow (y_1, y_0) \in L^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \subset H$, logo $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \subset \mathcal{H}$.

Teorema IV.3. *Para $\omega > 0$ suficientemente grande, existe un operador linear acotado $\mathcal{F} : \mathcal{H} \to L^2(\Omega)$ y una constante positiva M tal que , si $u = \mathcal{F}(y, y')$ el problema original* *es bien puesto en $\mathcal{H}$ y la solución "verifica*

$$\|(y(t),y'(t))\|_{\mathcal{H}} \leq M\,\|(y_0,y_1)\|_{\mathcal{H}} \cdot e^{-\omega t},\ \ \forall t\geq 0,\ \ \forall (y_0,y_1)\in\mathcal{H}$$

"

Demostración: Introducimos los operadores lineales "definidos por

$$D(A^*) = D(B^*) = \left\{\eta^0 \in H^2(\Omega),\ \gamma_1(\eta^0)=0 \text{ em } \Gamma\right\} \times H^1(\Omega)$$

$$A^*(\eta^0,\eta^1) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix} = (-\eta^1, -\Delta\eta^0)$$

$$B^*(\eta^0,\eta^1) = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix} = \gamma_0\eta^0$$

Dado $\varphi^0 = (\xi^0,\xi^1)\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} \xi'' - \Delta\xi = 0, & \text{em } \Omega\times\mathbb{R} \\ \gamma_1(\xi) = \dfrac{\partial\xi}{\partial\nu} = 0, & \text{em } \Gamma\times\mathbb{R} \\ \xi'(0)=\xi^0,\ \xi'(0)=\xi^1 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Si usamos la notación $\psi = \gamma_0(\xi)$, sobre $\Gamma\times\mathbb{R}$". Fazemos $\varphi = (\xi,\xi')$

$$-A^*\varphi = -\begin{bmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi' \\ \Delta\xi \end{bmatrix},\ \ \varphi' = \begin{bmatrix} \xi' \\ \xi'' \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\ -A^*\varphi = \varphi'$$

$$B^*\varphi = \begin{bmatrix} \gamma_0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi \\ \xi' \end{bmatrix} = \gamma_0\xi,\ \ \psi=\gamma_0\xi\ \Rightarrow\ B^*\varphi = \psi$$

Con esas notaciones el sistema (**) adopta la forma

$$\begin{cases} \varphi' = -A^*\varphi, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ \psi = B^*\varphi, \end{cases}$$

Verifiquemos las hipótesis (1) - (4).

Es conocido que A^* genera un grupo fuertemente contínuo en $H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Para verificar la hipótesis (2), denotamos $G = L^2(\Gamma)$ e introducimos la función de Newmann $N : L^2(\Gamma) \to H^1(\Omega)$, definida por

$$\begin{cases} -\Delta(Nu) + Nu = 0, & \text{en } \Omega \\ \gamma_1(Nu) = u, & \text{en } \Gamma \end{cases}$$

y el operador $E \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma), H)$, definido por $Eu = (Nu, Nu)$, donde N es un operador lineal limitado de $L^2(\Gamma)$ em $H^{3/2}(\Omega)$.
Si "$(\eta^0, \eta^1) \in D(A^*), u \in G \cap H_0^{1/2}(\Gamma)$, tenemos que

$$\left\langle E^*(A+I)^*(\eta^0,\eta^1), u\right\rangle_{G'\times G} = \left\langle (A+I)^*(\eta^0,\eta^1), Eu\right\rangle_{H'\times H}$$

$$= \left\langle (-(\eta^1-\eta^0), \eta^1 - \Delta\eta^0), (Nu, Nu)\right\rangle_{H'\times H} = \int_\Omega (\eta^0 - \Delta\eta^0) Nu\, dx$$

$$\int_\Omega \eta^0(-\Delta(Nu) + Nu)\, dx + \int_\Gamma -(\gamma_1(\eta^0)Nu + \eta^0(\gamma_1(Nu)))\, d\Gamma =$$

$$= \int_\Gamma \eta^0 u\, d\Gamma = \left\langle B^*(\eta^0,\eta^1), u\right\rangle_{G'\times G}$$

Como $G \cap H^{1/2}(\Gamma)$ es denso en G, concluímos que

$$\left\langle E^*(A+I)^*(\eta^0,\eta^1), u\right\rangle_{G'\times G} = \left\langle B^*(\eta^0,\eta^1), u\right\rangle_{G'\times G},\ \forall u \in G$$

Las hipótesis (3) - (4) son verificadas por la definición de H'.
Aplicamos el teorema de rápido decaimiento para $A = A^{**}, B = B^{**}$ ".
Problemas Equivalentes. Ahora, consideramos $y = y(x,t)$ solución del problema original y $\xi = \xi(x,t)$ solución del problema dual, "formalmente tenemos que

$$0 = \int_0^T \int_\Omega (y'' - \Delta y)\xi\, dx\, dt = \left[\int_\Omega (y'\xi - y\xi')\, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega y(\xi'' - \Delta\xi)\, dx\, dt$$

$$-\int_0^T \int_\Gamma (\frac{\partial y}{\partial \nu})\ \xi\, d\Gamma\, dt + \int_0^T \int_\Gamma y\ (\frac{\partial \xi}{\partial \nu})\, d\Gamma\, dt$$

Usando las condiciones de ambos problemas, se tiene

$$0 = \left[\int_\Omega (y'\xi - y\xi')\, dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Gamma -u\ \xi\, d\Gamma\, dt$$

Denotando $x = (-y', y),\ x_0 = (-y_1, y_0),\ \varphi = (\xi, \xi'),\ \varphi^0 = (\xi^0, \xi^1)$", podemos escrever a última equação na forma

$$0 = \langle (y', -y), (\xi, \xi')\rangle_{H\times H'} \Big|_0^T + \int_0^T \langle -u(s), B^*\varphi(s)\rangle_{G\times G'}\ dt$$

lo cual equivale

$$\langle x(t), \varphi(t) \rangle_{H\times H'} \Big|_0^T = \int_0^T \; \langle -u(s), B^*\varphi(s) \rangle_{G\times G'} \; dt$$

“o sea,

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H\times H'} = \left\langle x_0, \varphi^0 \right\rangle_{H\times H'} + \int_0^T \; \langle -u(s), B^*\varphi(s) \rangle_{G\times G'} \; dt$$

Por lo tanto, tenemos la equivalencia de problemas”.

De la teoria general, existe un isomorfismo $\Lambda_\omega^{-1} : H \to H'$, consideramos $u = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x$, usando la forma matricial del operador Λ_ω^{-1}, se tuene que

$$u = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x = -JB^* \begin{bmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y' \\ y \end{bmatrix}$$

$$u = -JB^* \left(-Py' - Qy, Ry' + Sy\right) = -J\gamma_0 \left(-Py' - Qy\right) = \gamma_0 \left(Py' + Qy\right) = \mathcal{F}(y, y')$$

IV.3 Ecuación de Petrovsky

Analisamos "el problema

$$\begin{cases} y'' + \Delta^2 y = 0, & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ y = \gamma_1(y) = \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \Gamma_0 \times \mathbb{R} \\ y = 0, \;\; \gamma_1(y) = \dfrac{\partial y}{\partial \nu} = u, & \text{en } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \\ y'(0) = y_0, \; y'(0) = y_1 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde Ω es un conjunto abierto do R^n, Γ_1 es un subconjunto abierto de Γ la fronteira de Ω y $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma 1$, ν el vetor normal unitario exterior a Γ".

Asumimos que Γ es de classe C^4 y existe un punto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que Γ_1 contiene todos los puntos que verificam la desigualdad $(x - x_0) \cdot \nu(x) > 0$.

Teorema IV.4. *Para $\omega > 0$ suficientemente grande, existen dos operadores lineales acotados*

$$P : H^{-2}(\Omega) \to H_0^2(\Omega), \quad Q : L^2(\Omega) \to H_0^2(\Omega)$$

y una constante positiva M tal que , si $u = \Delta(Py' + Qy)$ el problema original es bien puesto en $\mathcal{H} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ y la "solución verifica

$$\|(y(t), y'(t))\|_{\mathcal{H}} \leq M \, \|(y_0, y_1)\|_{\mathcal{H}} \cdot e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall (y_0, y_1) \in \mathcal{H}$$

"

Observación IV.8. *El teorema fuei mostrado antes, usando aproximação da equação de Riccati.*

Demostración: Dado "$\varphi^0 = (\xi^0, \xi^1) \in H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} \xi'' + \Delta^2 \xi = 0, & \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ \xi = \gamma_1(\xi) = \dfrac{\partial \xi}{\partial \nu} = 0, & \text{en } \Gamma \times \mathbb{R} \\ \xi'(0) = \xi^0, \; \xi'(0) = \xi^1 & \text{en } \Omega \\ \psi = \gamma_0(\Delta \xi) \text{ en } \mathbb{R} \end{cases}$$

Hacemos $\varphi = (\varphi, \varphi')$, introducimos los operadores lineales definidos por

$$D(A^*) = D(B^*) = \left(H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)\right) \times H_0^2(\Omega)$$

$$A^*(\eta^0,\eta^1) = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ +\Delta^2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix} = (-\eta^1, \Delta^2\eta^0)$$

$$B^*(\eta^0,\eta^1) = \begin{bmatrix} \gamma_0\Big|_{\Gamma_1} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \eta^0 \\ \eta^1 \end{bmatrix} = \gamma_0\Big|_{\Gamma_1}(\Delta\eta^0)$$

El problema dual es escrito en la forma

$$\begin{cases} \varphi' = -A^*\varphi, \\ \varphi(0) = \varphi^0, \\ \psi = B^*\varphi, \end{cases}$$

Verifiquemos las hipótesis (1) - (4), escojemos $H' = H_0^2(\Omega) \times L^2(\Omega), H = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega), G = L^2(\Gamma_1)$".

Es conocido que A^* genera un grupo fuertemente contínuo en $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Para verificar la hipótesis (2), introducimos "la función de Dirichlet $D : L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Omega)$, definida por

$$\begin{cases} \Delta^2(Du) = 0, & \text{em } \Omega \\ Du = \gamma_1(Du) = 0, & \text{em } \Gamma_0 \\ Du = 0, \;\; \gamma_1(Du) = u, & \text{em } \Gamma_1 \end{cases}$$

recordamos que el operador D es un operador lineal limitado".

El operador $E \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma_1), H = H^{-2}(\Omega) \times L^2(\Omega))$, definido por "$Eu = (0, -Du), u \in G$".

Si "$(\eta^0,\eta^1) \in D(A^*), u \in H_0^{5/2}(\Gamma_1)$, tenemos que

$$\left\langle E^*A^*(\eta^0,\eta^1), u\right\rangle_{G'\times G} = \left\langle A^*(\eta^0,\eta^1), Eu\right\rangle_{H'\times H}$$

$$= \left\langle(-\eta^1, \Delta^2\eta^0), (0, -Du)\right\rangle_{H'\times H} = -\int_\Omega (\Delta^2\eta^0)Du\, dx$$

$$= -\int_\Omega \eta^0(\Delta^2 Du)\, dx + \int_\Gamma -\gamma_1(\Delta\eta^0)Du\, d\Gamma +$$

$$+\int_\Gamma \left\{\Delta\eta^0(\gamma_1 Du) - \gamma_1(\eta^0)(\Delta Du) \;+\; \eta^0\gamma_1(\Delta Du)\right\}\, d\Gamma$$

Como $u \in H_0^{5/2}(\Gamma_1)$ entonces $Du \in H^4(\Omega)$. Usando la definición de D y las condiciones del problema, concluímos que

$$\left\langle E^*A^*(\eta^0,\eta^1), u\right\rangle_{G'\times G} = \left\langle \Delta\eta^0, u\right\rangle_{G'\times G}, \; \forall u \in G$$

Por densidad de $H_0^{5/2}(\Omega)$ em G, tem-se que $E^*A^* = B^*$".

Las hipótesis (3) - (4) son satisfechas por definición de H'.

Aplicamos el teorema de rápido decaimiento para $A = A^{**}, B = B^{**}$.

Problemas Equivalentes. Ahora, consideramos $y = y(x,t)$ solución del problema original y $\xi = \xi(x,t)$ solución del problema dual, "formalmente tenemos que

$$0 = \int_0^T \int_\Omega (y'' - \Delta y)\xi \; dx \; dt = \left[\int_\Omega (y'\xi - y\xi') \; dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega y(\xi'' - \Delta \xi) \; dx \; dt$$

$$- \int_0^T \int_\Gamma (\frac{\partial y}{\partial \nu}) \; \xi \; d\Gamma \; dt + \int_0^T \int_\Gamma y \; (\frac{\partial \xi}{\partial \nu}) \; d\Gamma \; dt$$

Usando las condiciones de ambos problemas, se tiene

$$0 = \left[\int_\Omega (y'\xi - y\xi') \; dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Gamma -u \; \xi \; d\Gamma \; dt$$

Denotando $x = (-y', y), \; x_0 = (-y_1, y_0), \; \varphi = (\xi, \xi'), \; \varphi^0 = (\xi^0, \xi^1)$, podemos escribir la última ecuación en la forma

$$0 = \langle (y', -y), (\xi, \xi') \rangle_{H \times H'} \Big|_0^T + \int_0^T \; \langle -u(s), B^*\varphi(s) \rangle_{G \times G'} \; dt$$

lo cual equivale

$$\langle x(t), \varphi(t) \rangle_{H \times H'} \Big|_0^T = \int_0^T \; \langle -u(s), B^*\varphi(s) \rangle_{G \times G'} \; dt$$

o sea,

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H \times H'} = \left\langle x_0, \varphi^0 \right\rangle_{H \times H'} + \int_0^T \; \langle -u(s), B^*\varphi(s) \rangle_{G \times G'} \; dt$$

Por lo tanto, tenemos la equivalencia de problemas".

De la teoria general, existe un isomorfismo $\Lambda_\omega^{-1} : H \to H'$, consideramos $u = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x$, usando la forma matricial del operador Λ_ω^{-1}, se tiene que

$$u = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x = -JB^* \begin{bmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -y' \\ y \end{bmatrix}$$

$$u = -JB^*\left(-Py' - Qy, Ry' + Sy\right) = -J\gamma_0\left(-Py' - Qy\right) = \gamma_0\left(Py' + Qy\right) = \mathcal{F}(y, y')$$

IV.4 Referencias Bibliográficas

[1] **BALAKRISHNAN, A. V.**, “Applied Functional Analysis, Springer - Verlag, New York 1976”.

[2] **FLANDOLI, F.**, “A new approach to the L -Q - R Problem for Hiperbolic Dynamics with Boundary Control, Lectures and Notes in Control and Information Sciences 102, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1987, pp. 89 - 111”.

[3] **KATO, T.**, Abstract Evolution Equations of Parabolic Type in Banach and Hilbert Spaces, Nogoya Math. Journal 19 (1961), pp. 93-125.

[4] **KOMORNIK V.**, Exact controllability in short time for the wave equation, Analyse Non Linéaire - Ann. Inst. Henri Poincaré, 6 1989, pp. 153-164.

[5] **LIONS, J. L.**, “Problèmes aux limites non homogènes et applications I - III, Dunod, Paris, 1968 - 1970”.

[6] **LIONS, J.L.**, Exact Controllability, stabilization and pertubations for distributed systems. J. Von Newmann Lecture. Boston 1986. SIAM Review. March 1988.

[7] **LIONS, J. L.** , Controlabilité exacte, Perturbations et Stabilisation de Systèmes Distribuées. Tome 1. Contrôlabilité Exacte, Masson, Paris, RMA 8, 1988.

[8] **TANABE H.**, Equation of Evolution, Pitman, London, 1979.

[9] **YOSIDA K.**, Functional Analysis, Springer - Verlag, Berlin, 1965.